

## Semana 12: Cap. 9 – Integrais e Áreas (Parte I)

**1 Exercícios de aplicação directa****1.1.** Calcule as seguintes primitivas:

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \int x^2 dx & \text{b)} \int \sqrt{x} dx & \text{c)} \int e^x dx & \text{d)} \int \cos y dy & \text{e)} \int \frac{x^5}{5} dx & \text{f)} \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ \text{g)} \int \frac{1}{2} dx & \text{h)} \int x^4 dt & \text{i)} \int (\sin u + x^2) dx & \text{j)} \int (\sin u + x^2) du & \text{k)} \int e^{7u} dx & \text{l)} \int \frac{1}{2} dt. \end{array}$$

**1.2.** Calcule a primitiva  $F(x) = \int f(x) dx$ :

- a) tal que  $F(2) = 0$ , para  $f(x) = x^4$ ;
- b) tal que  $F(0) = 1$ , para  $f(x) = e^x$ ;
- c) tal que  $F(1) = \pi$ , para  $f(x) = x^{-1}$ ;
- d) tal que  $F(0) = e$ , para  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 12$ ;
- e) tal que  $F(1) = 0$ , para  $f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

**1.3.** Calcule os seguintes integrais:

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \int_0^2 x^3 dx & \text{b)} \int_1^0 (-\sqrt{x}) dx & \text{c)} \int_0^{\ln 1} e^{-t} dt & \text{d)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos y dy & \text{e)} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ \text{f)} \int_{-1}^1 (6x^5 + \frac{1}{3}x^2 - 2x + 7) dx & \text{g)} \int_2^3 (\sin u + x^{\frac{1}{3}}) dx & \text{h)} \int_e^{7e} e^{7u} dx & \text{i)} \int_a^b 1 dt. \end{array}$$

**1.4.** Calcule a área entre o gráfico de  $f$  e o eixo das abcissas para:

- a)  $f(x) = x^2$ , e  $x \in [0; 2]$ ;
- b)  $f(x) = -x^2$ , e  $x \in [0; 2]$ ;
- c)  $f(t) = e^{-t}$ , e  $t \in [1; 5]$ ;
- d)  $f(x) = -\sqrt{\sqrt{x}}$ , e  $x \in [0; 1]$ ;
- e)  $f(x) = \frac{-x^4 - 2x^2}{x}$ , e  $x \in [-1; 1]$ .

**2 Definições e Demonstrações****2.1.** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $\mathbb{R}$ , e  $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$  constantes. Demonstre que:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx. \\ \text{b)} \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \\ \text{c)} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ com } a \leq c \leq b. \end{array}$$

**2.2.** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua ímpar, e  $k \in \mathbb{R}$ .

- a) Demonstre que  $\int_{-k}^k f(x)dx = 0$ .
- b) Interprete geometricamente o resultado anterior.

**2.3.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$ , e seja  $d(a, b)$  a distância entre estes dois pontos.

- a) Mostre que  $d(a, b) = \int_a^b dx$ .
- b) Interprete geometricamente o resultado anterior.

### 3 Problemas e Modelização

**3.1.** Um poço de petróleo tem uma taxa de extração (medida em barris por unidade de tempo) que varia com o tempo  $t$  segundo:  $10e^{-2t}$ .

- a) Qual a quantidade de petróleo extraída do poço ao fim do tempo  $t = 50$ ?
- b) Resolva o mesmo problema para uma taxa que varia segundo  $2^{-t}$ , explicando claramente todos os cálculos.

**3.2.** Seja a função  $f(x) = \sin x$ . Calcule a área entre o gráfico de  $f$  e o eixo das abscissas para:

- a)  $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ;
- b)  $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ ;
- c)  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .
- d) Discuta os resultados do ponto de vista geométrico.
- e) Discuta os resultados do ponto de vista do teorema apresentado no exercício 2.2.

**3.3.** Seja a função  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ . Calcule a área entre o gráfico de  $f$  e o eixo das abscissas para  $x \in [-1; 2]$ .

### 4 Exercícios adicionais

**4.1.** Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

**Secção 9.1:** Exercícios 1 a 9;

**Secção 9.2:** Exercícios 1 a 6, 8.