Matemática I – 2º Semestre 2009/10
Ficha de exercícios

Semana 13: Cap. 9 – Integrais e Áreas (Parte II)

Nota: os exercícios 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.3 e 2.4 serão corrigidos nas aulas teóricas.

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Estude a convergência dos seguintes integrais impróprios, e calcule-os sempre que possível:
a) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}dx$ c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ d) $\int_{-\infty}^{+\infty} u^3du$ e) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx$.

1.2. Calcule, utilizando a primitivação por partes, as seguintes primitivas:
a) $\int xe^x dx$ b) $\int x^2 \ln x dx$ c) $\int t \sin t dt$ d) $\int x^2 \sin x dx$ e) $\int e^x \cos x dx$.

1.3. Calcule, utilizando a primitivação por substituição, as seguintes primitivas:
a) $\int 2x \sin(x^2)dx$ b) $\int e^{x^2} x dx$ c) $\int \frac{x^4}{x^5+7}dx$ d) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$ e) $\int \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}dx$.

1.4. Calcule a área dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:
a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 5 \wedge y \geq -5x+5 \wedge y \geq \ln x\}$
b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq e^x \wedge x \leq 1\}$
c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq -x^2+2\}$.

1.5. Calcule os seguintes integrais:
a) $\int_0^{\sin t} x^3dx$ b) $\int_1^e \ln x dx$ c) $\int_0^1 te^{-t^2}dt$ d) $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x dx$ e) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$
f) $\int_0^1 \sqrt{3x+7}dx$ g) $\int_{-3}^4 |x-2|dx$ h) $\int_0^1 3e^{5x+1}dx$ i) $\int_0^{\pi} 2xt^3 \cos t^4 dt$ j) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

2 Problemas

2.1. Calcule as seguintes áreas através de integrais:

a) Calcule a área que fica acima do gráfico da função $f(x) = x^2-4$ e abaixo do eixo das abcissas.

b) Calcule a área que fica acima do gráfico da funçao $f(x) = \ln x$, para $x \in [0,1]$, e abaixo da recta $y = 0$.

c) Calcule a área entre os gráficos das funçoes $f(x) = x^2+x+1$ e $g(x) = 2x^2+5x+4$, para $x \in [-3,0]$.

2.2. Determine o domínio, os intervalos de monotonia e os extremos locais das funções:
a) $F(x) = \int_1^x \ln t dt$ b) $H(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$.

2.3. Considere a função $f(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{x^2} e^{-2t}dt$. Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 de f em torno de $x = 0$.

2.4. Considere a função $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} tf(t)dt$, onde f é uma função contínua e estritamente positiva em $\mathbb{R}$. Prove que $x = 0$ é um minimizante local da função $F(x)$.

2.5. Considere a função $f(x) = \begin{cases} a - x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{b+x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, com $b > 0$.

a) Determine os valores de a e de b para os quais a função f é contínua.

b) Faça $a = b = 1$ e considere a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)dt$. Calcule $F(1)$. Em seguida, mostre que a função F admite inversa no intervalo $(0, +\infty)$.

2.6. Seja a função $f(x) = \displaystyle\int_{1}^{x^2+1} \left(\frac{1+t}{t}\right) dt$.

a) Calcule $f(-1)$.

b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = -1$.

2.7. Considere a função com domínio D_f: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1 & \text{se } x < 0 \\ e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Para que valores de $x \in D_f$ a função f é diferenciável? Escreva a expressão da função derivada $f'(x)$.

b) Determine $G(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)dt$, definida em $[-1, \infty)$.

2.8. Determine a função f, duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, que verifica: $f''(x) = 2\cos x + xe^x$, $f'(0) = 2$, $f(0) = 1$

2.9. Sem utilizar a primitivação, calcule:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln\left(t^2+1\right) dt}{x^3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos t dt}{x^2}$.

3 Exercícios adicionais

3.1. Determine uma primitiva das seguintes funções, nos respectivos domínios:

a) x^2e^x b) $x\sqrt{x+1}$ c) $x^3\sqrt{1+x^2}$ d) $2x\cos x$ e) $\sin^2 x$

f) $\ln(2x-1)$ g) $\mathrm{x}^2 \ln x$ h) $\arctan x$ i) $\ln^2 x$ j) $e^x \cos x$.

3.2. Determine, por substituição, uma primitiva das seguintes funções:

a) $\dfrac{x}{1+x^2}$ b) $\sqrt{1-\sin^2 x}$

c) $\dfrac{e^{\frac{x}{4}}}{1+e^{\frac{x}{10}}}$, com $x = 20\ln t$ $(t > 0)$ d) $\dfrac{\cos x}{\sin^6 x}$, com $x = \arcsin t$.

3.3. Estude a convergência dos integrais impróprios e calcule-os quando tal for possível:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x dx$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1} dx$ e) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{1}{x-3} dx$ f) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

3.4. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 9.3: Exercícios 4 a 6;
Secção 9.5: Exercícios 2 e 3;
Secção 9.6: Exercício 3;
Secção 9.7: Exercícios 1, 4 e 12.