

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2008/2009

EXAME FINAL 15 Janeiro 2009

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Considere os conjuntos

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + \log(z/x) - \log(z/y) = 0, x, y, z > 0\},$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = z\}.$$

- (a) Mostre que M , N e $M \cap N$ são variedades diferenciais e determine as suas dimensões.
- (b) Escreva os espaços tangente e normal de $M \cap N$ num ponto qualquer $p \in M \cap N$.

(2) Calcule:

(a) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(b) o integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

(c) o ponto sobre a superfície esférica de centro $(2, 3, 4)$ e raio 1, mais próximo da origem.

(3) Considere a curva em \mathbb{R}^2 dada por

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 9x^2 + 4y^2 = 36\}.$$

(a) Calcule o integral em Γ da função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por
 $f(x, y) = \sqrt{81x^2 + 16y^2}$.

(b) Seja

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in \Gamma, z \in [0, 1]\}.$$

Determine o fluxo de $g(x, y, z) = (0, 0, 1)$ através de M .

(4) Considere o conjunto $\Omega = [0, 1]$ e o subconjunto das partes de Ω dado por $\mathcal{A} = \{\{0\}, \{1\}\}$. Indique a σ -álgebra \mathcal{F} gerada por \mathcal{A} . Decida se

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \text{ ou } 1 \in A \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad A \in \mathcal{F},$$

é uma medida de probabilidade.

(5) (a) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/n} dt.$$

(b) Mostre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sugestão: Recorde que $1/(1 - y) = \sum_{n \geq 0} y^n$ com $|y| < 1$.

Use o teorema de Beppo-Levi.

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2008/2009

EXAME FINAL 30 Janeiro 2009

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y).$$

- (a) Mostre pelo teorema da função implícita que numa vizinhança de $(1, 1, 0)$ o conjunto $F^{-1}(\{(2, 0)\})$ é o gráfico de uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo aberto de \mathbb{R} .
- (b) Encontre uma parametrização de $F^{-1}(\{(2, 0)\})$ numa vizinhança U de $(1, 1, 0)$.

(2) Considere o caminho $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

Calcule:

- (a) o comprimento da curva $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.
- (b) o integral do campo vectorial $f(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, 1)$ ao longo de γ .

(3) Decomponha a unidade num produto de três números positivos cuja soma seja mínima.

(4) Considere a superfície

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, \frac{\pi}{2} < z < \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

- (a) Escreva uma representação paramétrica de M e determine o integral de $f(x, y, z) = (x + y) \sin z$ em M .
- (b) Calcule o fluxo do campo vectorial $g(x, y, z) = (xz^2, yz^2, z^3)$ através de M segundo a normal unitária com terceira componente negativa.

(5) Seja

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{N}^2 : \omega_1, \omega_2 \in \{0, \dots, 9\}\}$$

e $A_i = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = i\}$ para $i \in \{0, \dots, 9\}$. Determine a σ -álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$. Nestas condições, construa uma medida de probabilidade.

(6) Calcule:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \sin^n(x+y) dx dy.$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \left[\frac{2n^2}{n^2 + x^2} + f(x^n) \right] dx,$$

onde $f \in C^0([0, 1])$.

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2009/2010

EXAME FINAL 6 Janeiro 2010

Duração máxima: 2 horas
Cada alínea vale 2 valores
Sem consulta, sem calculadora

(1) Considere o conjunto

$$M = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : ad - bc = 1\}$$

e a função $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

- (a) Mostre que M é uma variedade diferencial e determine a sua dimensão.
- (b) Determine os espaços tangente e normal a M no ponto $(1, 0, 0, 1)$.
- (c) Prove que $\varphi \geq 2$ em M .

Sugestão: Encontre o mínimo de φ em M .

(2) Calcule:

(a) os pontos de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2, 2x + z = 2\}$$

mais próximos e mais distantes da origem.

(b) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(c) o integral

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} e^{-y/x} \frac{y}{x} dx dy.$$

Sugestão: Use o teorema de Fubini.

(d) o integral

$$\int_V \operatorname{div} f$$

onde $f(x, y, z) = (-y \sin^2(x + y), x \sin^2(x + y), z)$ e

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x - y < 1, 0 < x + y < 1, 0 < z < 1\}.$$

(3) Seja

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{N}^2 : \omega_1, \omega_2 \in \{0, \dots, 9\}\}$$

e $A_i = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = i\}$ para $i \in \{0, \dots, 9\}$.

(a) Determine a σ -álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$ denotada por $\sigma(\mathcal{A})$.

(b) Considere a aplicação $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(A) = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

onde $\#B$ indica o número de elementos de um qualquer conjunto B . Mostre que μ é uma medida de probabilidade.

(4) Dado $q \in]0, 1[$, mostre que a função μ definida em subconjuntos A de \mathbb{N} por

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} (1 - q)q^{n-1},$$

define uma medida de probabilidade em \mathbb{N} .

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2009/2010

EXAME FINAL 27 Janeiro 2010

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ considere o conjunto

$$M_\theta = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : ad - bc = \theta, a + d = 0\}$$

e a função $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

- (a) Determine para que valores de θ o conjunto M_θ é uma variedade diferencial e qual a sua dimensão.
- (b) Determine os espaços tangente e normal a M_θ no ponto $(0, -\theta, 1, 0)$ com $\theta \neq 0$.
- (c) Prove que $\varphi \geq 2|\theta|$ em M_θ com $\theta < 0$.

(2) Considere o caminho $\gamma: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t, \sin t, t)$$

e o campo vectorial

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{2x}{(x^2 - y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2 - y^2)^2}, z^2 \right).$$

- (a) Mostre que f é o gradiente de uma função escalar.
- (b) Calcule o integral do campo vectorial f ao longo de γ .

(3) Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, x^2 - 1 < y < x^2, x^3 < z < x^3 + 2\}.$$

(a) Decida se $h(x, y, z) = (x, y - x^2, z - x^3)$ é uma mudança de coordenadas em S e determine $h(S)$.

Sugestão: Recorde que h é uma mudança de coordenadas sse é C^1 , injectiva e $\det Dh(x, y, z) \neq 0$.

(b) Indique o valor de

$$\int_S \frac{z - x^3}{1 + x^2} dx dy dz.$$

(4) Seja $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável e E um conjunto mensurável tal que $m(E) < +\infty$. Considere a função $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\omega(x) = m(\{y \in E : f(y) > x\}).$$

(a) Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \omega(x)$ e a monotonia de ω .

(b) Qual a condição para que ω seja contínua num ponto $a \in \mathbb{R}$.

(5) Dado $\lambda > 0$, mostre que a função μ definida em subconjuntos A de \mathbb{N} por

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!},$$

define uma medida de probabilidade em \mathbb{N} .

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2010/2011

EXAME ÉPOCA NORMAL 5 Janeiro 2011

Duração máxima: 2 horas
Cada alínea vale 2 valores
Sem consulta, sem calculadora
Justifique todos os cálculos

(1) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ considere o conjunto

$$M_\theta = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : ad - bc = \theta, a + d = 0\}$$

e a função $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

- (a) Determine para que valores de θ o conjunto M_θ é uma variedade diferencial e qual a sua dimensão.
- (b) Determine os espaços tangente e normal a M_θ no ponto $(0, -\theta, 1, 0)$ com $\theta \neq 0$.
- (c) Prove que $\varphi \geq 2|\theta|$ em M_θ com $\theta < 0$.

(2) Calcule:

(a) a massa do sólido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 1\}$$

sabendo que a densidade de massa é dada por

$$\rho(x, y, z) = e^{-x^2 - y^2}.$$

(b) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x, y, z \geq 0\}.$$

(c) o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x^2 + y^2)^{n/2}}{1 + (x^2 + y^2)^{(n+3)/2}} dx dy.$$

(3) Calcule, para o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1, 0 < y < x\},$$

o valor de

$$\int_A (x^2 - y^2) e^{-(x+y)^4} dx dy.$$

(4) Seja $\alpha > 0$. Considere a superfície

$$S_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \alpha(x^2 + y^2), 1 < x^2 + y^2 < 2\}$$

e a normal unitária ν a S_α com terceira componente negativa. Determine o fluxo de $F(x, y, z) = (y^3, x^3, (z-\alpha)(z-2\alpha))$ através de S_α segundo ν .

(5) Seja Ω um conjunto finito e não vazio. Considere a σ -álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$ contendo todos os subconjuntos de Ω . Seja $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(\omega) \geq 0$ para qualquer $\omega \in \Omega$, e

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

(a) Mostre que

$$\mu(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \quad A \subset \Omega$$

define uma medida de probabilidade em $\mathcal{P}(\Omega)$.

(b) Para $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ e $p(\omega) = \frac{1}{4}$, calcule $\int_\Omega \varphi d\mu$ onde $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(\omega_1, \omega_2) = 1$ se $\omega_1 = 0$ e $\varphi(\omega_1, \omega_2) = 0$ caso contrário.

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2010/2011

EXAME ÉPOCA RECURSO 26 Janeiro 2011

Duração máxima: 2 horas
Cada alínea vale 2 valores
Sem consulta, sem calculadora
Justifique todos os cálculos

(1) Calcule:

(a) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y > 0\}.$$

(b) o integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

(c) o ponto sobre a superfície cilíndrica com eixo dado pela recta $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, y = 0\}$ e raio 2, mais próximo da origem.

(2) Seja $r > 0$ e

$$S_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2, y > 0\}.$$

Considere a normal unitária ν a S_r cuja segunda componente é negativa. Calcule o valor de r para o qual o fluxo de $F(x, y, z) = (z^2y^3, x^2 + z^2, x^2y^3)$ através de S_r segundo ν é $-\pi$.

Sugestão: Note que ν não é necessariamente exterior.

(3) Calcule o integral de linha de

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \right)$$

ao longo da fronteira do losango que une os pontos $(2, 0)$, $(0, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ no sentido horário.

- (4) Dado $\lambda > 0$, considere a seguinte função μ definida para subconjuntos A de \mathbb{N} :

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

- (a) Mostre que μ define uma medida de probabilidade em \mathbb{N} .
 (b) Calcule o integral $\int_{\mathbb{N}} \varphi d\mu$ onde $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(n) = n$ se $n \leq 3$ e $\varphi(n) = 0$ caso contrário.
 (c) Calcule $\int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n} d\mu(n)$.
- (5) Considere $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Dado $\varepsilon > 0$, dê um exemplo de um conjunto aberto V tal que $A \subset V$ e $m(V) \leq \varepsilon$, onde m é a medida de Lebesgue. *Sugestão:* Recorde que a união de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto.

- (6) Seja a função em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por

$$f(x) = \|x\|^{-\|x\|}.$$

Determine se f é integrável à Lebesgue no seu domínio.

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2011/2012

EXAME ÉPOCA NORMAL 9 Janeiro 2012

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todos os cálculos

- (1) (a) Parametrize uma curva no plano que descreva a letra “J”.
(b) Calcule o integral do campo vectorial $X(x, y) = (1, 0)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ao longo da curva da alínea anterior.

- (2) Considere uma superfície M em \mathbb{R}^3 parametrizada em torno do ponto $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ por $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\phi(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

com $V =]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[$.

- (a) Determine os espaços tangente e normal a M em p .
(b) Dada a função $f(x, y, z) = y$ em \mathbb{R}^3 , calcule o integral de f em $\phi(V)$.

- (3) Calcule:

- (a) a distância média à origem dos pontos em \mathbb{R}^2 contidos num círculo com raio R centrado na origem.
(b) os pontos em $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = z\}$ mais próximos de $(0, 0, 1)$.
(c) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: r \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R, x, y, z \geq 0\},$$

onde $0 < r < R$.

- (4) Considere a medida de contagem $\mu(A) = \#A$ com $A \subset \mathbb{N}$, e a função mensurável $f(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.
- (a) Definindo $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, calcule $\nu(\{1, 2, \dots, 10\})$ e mostre que ν é uma medida.
- (b) Calcule $\int_A \frac{1}{n} d\nu(n)$ onde $A = \{1, 2, \dots, 10\}$.
- (5) Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Seja A_k , $k \in \mathbb{N}$, uma sucessão de conjuntos mensuráveis com medida total. Mostre que a sua intersecção também tem medida total.

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2011/2012

EXAME ÉPOCA RECURSO 25 Janeiro 2012

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todos os cálculos

- (1) (a) Parametrize uma curva no plano que descreva a letra “Ω”.
(b) Calcule o integral do campo vectorial $X(x, y) = (1, 1)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ao longo da curva da alínea anterior.

(2) Calcule:

(a) a distância média à origem dos pontos de \mathbb{R}^3 contidos no interior da esfera com raio R centrada na origem.

(b) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + x^2 \leq y^2, 0 < y < 1\}.$$

(c) o integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

(3) Seja $\alpha > 0$ e

$$S_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, z < \alpha\}.$$

(a) Determine a normal unitária exterior ν a S_α .

(b) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$X(x, y, z) = (z^2 y^3, x^2 + z^2, xy)$$

através de S_α segundo ν .

(4) Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a medida de Dirac

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

com $A \subset \mathbb{R}$, e a seguinte função

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{10} i \delta_i(A).$$

(a) Obtenha o valor de $\mu(\mathbb{R})$ e mostre que μ é uma medida.

(b) Calcule $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} d\mu(n)$.

(5) Mostre que um subconjunto de \mathbb{R}^n com medida de Lebesgue total é denso.

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2012/2013

EXAME ÉPOCA NORMAL 11 Janeiro 2013

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todos os cálculos

- (1) (a) Esboce a curva parametrizada por $\phi(t) = (\sin(2t), \sin t)$ com $t \in [0, 2\pi]$, e indique se é simples e se é fechada.
(b) Calcule o integral do campo vectorial $X(x, y, z) = (x, 1, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ao longo da curva parametrizada por $\phi(t) = (\sin(t), \sin(2t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

- (2) Considere a aplicação

$$\nu(A) = \int \int_A e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

para cada $A \subset \mathbb{R}^2$ mensurável à Lebesgue.

- (a) Mostre que ν é uma medida.
(b) Calcule $\nu(B)$ onde

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x > 0\}.$$

- (3) Calcule:

- (a) a média da distância à origem dos pontos de \mathbb{R}^3 contidos no interior da esfera com raio $R > 0$ centrada na origem.
(b) o ponto do plano $P = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$ mais perto da origem.

(4) Seja

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y > 0, 0 < z < 1\}.$$

(a) Mostre que S é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão.

(b) Determine os vectores normais unitários em cada ponto da fronteira de

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, y > 0, 0 < z < 1\}.$$

(c) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$X(x, y, z) = \left(x^2 y, \frac{x}{1 + y^4}, \sqrt{z} \right)$$

pela fronteira de D .

(5) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e \mathcal{F} uma σ -álgebra de Ω . Considere uma aplicação $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para quaisquer dois conjuntos disjuntos $A, B \in \mathcal{F}$. Mostre que μ é uma medida se verifica a seguinte propriedade:

$$\mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k)$$

para qualquer sequência de conjuntos mensuráveis $A_k \subset A_{k+1}$.

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2012/2013

EXAME ÉPOCA RECURSO 31 Janeiro 2013

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todos os cálculos

- (1) (a) Escreva a parametrização de uma curva em \mathbb{R}^3 com a forma ∞ e decida se é uma variedade diferencial.
(b) Calcule os espaços tangente e normal à curva da alínea anterior num ponto à sua escolha.

- (2) Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ uma função integrável à Lebesgue relativamente à medida de Lebesgue m em \mathbb{R}^3 . Considere a aplicação

$$\nu(A) = \int_A f \, dm$$

para qualquer $A \subset \mathbb{R}^3$ mensurável à Lebesgue.

- (a) Sabendo que $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$ para A e B conjuntos mensuráveis disjuntos, mostre que ν é aditiva para a união numerável. (Sugestão: use o teorema da convergência monótona)
(b) Calcule $\nu(B)$ onde

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$

e

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1\}.$$

(3) Calcule:

(a) o ponto na recta $P = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 + x_2 = 3\}$ mais perto da circunferência $C = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

(b) a média da distância ao eixo $\{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3: z \in \mathbb{R}\}$ dos pontos contidos no cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq R, |z| \leq h\}$$

com $R, h > 0$.

(4) Seja

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = (z - 1)^2, y > 0, 0 < z < \frac{1}{2} \right\}.$$

(a) Mostre que S é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão.

(b) Determine os vectores normais unitários em cada ponto da fronteira de

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 < (z - 1)^2, y > 0, 0 < z < \frac{1}{2} \right\}.$$

(c) Calcule o fluxo do campo vectorial $X(x, y, z) = (y^2, x, (1 - z)^{-1})$ pela fronteira de D .

(5) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e \mathcal{F} uma σ -álgebra de Ω . Considere uma aplicação $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para $A, B \in \mathcal{F}$ disjuntos. Mostre que se

$$\mu \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k)$$

para qualquer sequência de conjuntos mensuráveis $A_{k+1} \subset A_k$, então μ é uma medida em \mathcal{F} .

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2013/2014

EXAME ÉPOCA NORMAL 13 Janeiro 2014

Duração máxima: 2 horas
Cada alínea vale 2 valores
Sem consulta, sem calculadora
Justifique todas as respostas

(1) Considere o conjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1, x > 0\}.$$

- (a) Mostre que M é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão.
- (b) Determine o espaço tangente e o espaço normal de M no ponto $(1, 1)$.

(2) Calcule:

(a) o ponto de

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x - (1, 2, 3, 4)\| = 1\}$$

mais próximo da origem.

(b) o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

(3) Considere a hipérbole

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 - y^2 = 1\}$$

e recorde as funções hiperbólicas:

$$\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

- (a) Decida se a função $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$, parametriza uma das componentes da hipérbole H . Em caso afirmativo, indique qual.
- (b) Calcule o integral de linha de $f(x, y) = (x^{-2}, 0)$ ao longo de H restringido ao primeiro quadrante.
- (c) Decida se $\phi: \mathbb{R}^+ \times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(r, \theta) = (r \cosh \theta, r \sinh \theta)$, é uma transformação de coordenadas.
- (d) Esboce

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 - y^2 = r^2, 1 < r < 2, 0 < y < \frac{e-1}{e+1}x \right\}$$

e calcule o integral em S de

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x+y}{x-y} \right).$$

(4) Considere um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Prove que

(a) para $\lambda > 0$ e uma função mensurável $f \geq 0$, temos

$$\mu(\{x \in \Omega: f(x) \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} f d\mu,$$

(b) se $A_k \in \mathcal{F}$ e $A_k \subset A_{k+1}$ com $k \in \mathbb{N}$, então

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2013/2014

EXAME ÉPOCA RECURSO 27 Janeiro 2014

Duração máxima: 2 horas
Cada alínea vale 2 valores
Sem consulta, sem calculadora
Justifique todas as respostas

(1) Considere o hiperbolóide

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

- (a) Qual a dimensão desta variedade?
- (b) Calcule os espaços tangente e normal de H no ponto $(1, 1, 1)$.
- (c) Determine o ponto de $H \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ mais próximo de $(1, 2, 3)$.

(2) Calcule:

(a) o integral

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{y}{x} e^{-xy-y/x} dx dy.$$

(b) o centróide de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1, |x| < 2\}$.

(3) Considere o conjunto $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \max_i |x_i| < 1\}$.

(a) Esboce a fronteira de D e determine a normal exterior unitária em cada ponto.

(b) Calcule

$$\int_D \operatorname{div} X$$

onde X é o campo vectorial dado por

$$X(x, y, z) = (e^{x^2yz}, \cos(xy^2z), e^{\sin(xyz^2)}).$$

(4) Considere a σ -álgebra \mathcal{M} de Lebesgue em \mathbb{R} . Seja $\mu = m + \delta_0$ onde m é a medida de Lebesgue e δ_0 é a medida de Dirac no ponto 0. Mostre que:

(a) μ é uma medida em \mathcal{M} e que para qualquer função simples φ e qualquer conjunto mensurável A temos que

$$\int_A \varphi d\mu = \int_A \varphi dm + \varphi(0).$$

(b) para qualquer função mensurável f temos que

$$\int_A f d\mu = \int_A f dm + f(0),$$

e calcule

$$\int_{[0,2\pi]} \sin(x) d\mu(x).$$

(5) Seja Ω um conjunto finito. Determine o cardinal do conjunto das partes de Ω .

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2014/2015

EXAME ÉPOCA NORMAL 12 Janeiro 2015

Duração máxima: 2 horas
Cada alínea vale 2 valores
Sem consulta, sem calculadora
Justifique todas as respostas

(1) Considere o campo vectorial

$$X(x, y, z) = \frac{1}{4}(x^3, y^3, z^3), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

a função $f(x, y, z) = (x, y, z) \cdot X(x, y, z)$ e a superfície esférica

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

- (a) Mostre que M é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão e os espaços tangente e normal em cada ponto.
- (b) Encontre e classifique os extremos globais de f em M .
- (c) Determine o integral de f em M usando o teorema da divergência.

(2) Recorde as funções hiperbólicas

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \quad \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

Considere o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x \cosh y < 1\}$$

- (a) Mostre que $\phi(x, y) = (xe^y, xe^{-y})$ é uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e determine ϕ^{-1} .
- (b) Esboce A e $\phi(A)$.
- (c) Calcule a área de A .

(3) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ considere $\mathcal{A}_\alpha = \{\{\alpha\}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Calcule:

(a) a σ -álgebra $\sigma(\mathcal{A}_\alpha)$ gerada por \mathcal{A}_α .

(b) $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \sigma(\mathcal{A}_\alpha)$.

(4) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

(a) Considere uma sucessão de conjuntos mensuráveis A_1, A_2, \dots

disjuntos dois a dois tais que $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega$. Dado $D \in \mathcal{F}$

calcule

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i \cap D).$$

(b) Dada uma função mensurável $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ prove usando o

teorema da convergência monótona que

$$\int_{\Omega} f d\mu \geq \inf_{x \in \Omega} f(x) \mu(\Omega).$$

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2014/2015

EXAME ÉPOCA RECURSO 26 Janeiro 2015

Duração máxima: 2 horas
Cada alínea vale 2 valores
Sem consulta, sem calculadora
Justifique todas as respostas

(1) Considere o conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ e uma função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

(a) Calcule a divergência do gradiente de f e a normal unitária exterior à fronteira de D em cada ponto.

(b) Para $f(x, y) = x + y^2$ e usando o teorema da divergência, encontre o valor do integral

$$\int_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

(c) Determine e classifique os extremos da função f (dada na alínea anterior) na fronteira de D .

(2) Considere o conjunto

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0, y > 0, 0 < x \frac{e^y + e^{-y}}{2} < 1 \right\}$$

(a) Mostre que $\phi(x, y) = (xe^y, xe^{-y})$ é uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e determine ϕ^{-1} .

(b) Esboce A e $\phi(A)$.

(c) Calcule a primeira componente do centróide de A .

(3) Considere a função $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} [|\sin x|], & x \in [0, 2\pi] \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z}: k \leq x\}$ indica a parte inteira de x .

(a) Mostre que φ é uma função simples relativamente à σ -álgebra de Borel.

(b) Sendo m a medida de Lebesgue em \mathbb{R} , calcule $\int_{[0, 2\pi]} \varphi dm$.

(4) Dê um exemplo de uma medida μ em \mathbb{R} tal que para qualquer função mensurável f obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \sum_{n=1}^{10} f(1/n).$$

(5) Seja Ω um conjunto finito e $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Decida se a aplicação $\mu(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, $A \subset \Omega$, é uma medida de probabilidade.

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2015/2016

EXAME ÉPOCA NORMAL 15 Janeiro 2016

Duração máxima: 2 horas
Cada alínea vale 2 valores
Sem consulta, sem calculadora
Justifique todas as respostas

PARTE I

(1) Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\} \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

- (a) Mostre que M é uma variedade diferencial, indique a sua dimensão e os espaços tangente e normal em cada ponto.
- (b) Encontre e classifique os extremos de $f(x, y, z) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4)$ em M .
- (c) Calcule o fluxo do campo vectorial $X(x, y, z) = (xz^2, yz^2, z^3)$ através de $M \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\pi}{2} < z < \frac{3\pi}{2}\}$ segundo a normal unitária com terceira componente negativa.

(2) Calcule:

(a)

$$\int_V \operatorname{div} f$$

onde $f(x, y, z) = (-y \sin^2(x + y), x \sin^2(x + y), z)$ e

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x - y < 1, 0 < x + y < 1, 0 < z < 1\}.$$

(b)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

PARTE II (2º Teste)

(3) Considere a superfície

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > \frac{\pi}{2} \right\}.$$

(a) Indique o integral de $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2)}$ em M .

(b) Determine o integral de linha de

$$X(x, y, z) = \left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z}, -\frac{x+y}{z^2} \right)$$

ao longo do bordo de M .

(4) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f: \Omega \rightarrow \Omega$ e

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : f^{-1}(A) = A\}.$$

(a) Mostre que (Ω, \mathcal{F}) é um espaço mensurável.

(b) Considere uma medida μ em (Ω, \mathcal{F}) e $A, B \in \mathcal{F}$ disjuntos.

Calcule

$$\int_{f^{-1}(B)} \mathcal{X}_A \circ f \, d\mu.$$

(5) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/n} \, dt.$$

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2015/2016

EXAME ÉPOCA DE RECURSO 2 Fevereiro 2016

Duração máxima: 2 horas
Cada alínea vale 2 valores
Sem consulta, sem calculadora
Justifique todas as respostas

PARTE I

- (1) Considere a função $f(x, y, z) = x + y + z + xyz$ definida em \mathbb{R}^3 ,
o conjunto aberto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\},$$

a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$$

e a curva

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

- (a) Escreva a normal exterior unitária em cada ponto da fronteira de A .
- (b) Calcule o gradiente de f e determine o seu fluxo através da fronteira de A segundo a normal exterior unitária.
- (c) Encontre e classifique os extremos de f em S e em C .
- (d) Determine o valor médio de f em A .
- (e) Determine o valor médio de f em S e em C .

PARTE II (2º Teste)

(2) Considere a curva

$$\Gamma = \left\{ (\cos t, \sqrt{2} \sin t, -\cos t) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0, \pi] \right\}.$$

(a) Indique o comprimento de Γ .

(b) Determine o integral de linha ao longo de Γ de

$$X(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y + e^z).$$

(3) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade e considere os conjuntos mensuráveis $A, B \in \mathcal{F}$ com $\mu(A) = 1$. Calcule $\mu(B) - \mu(B \cap A)$.

(4) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dê um exemplo de uma função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que seja \mathcal{F} -mensurável com $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.

(5) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \sin(e^{-x}) e^{-nx} dx$$

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2016/2017

EXAME ÉPOCA NORMAL 9 Janeiro 2017

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todas as respostas

(1) Considere os conjuntos

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \leq 0\}$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/4 + y^2 = 1, x > 0\}$$

$$M = M_1 \cup M_2.$$

- (a) Determine se M_2 é uma variedade. Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e o espaço tangente em cada um dos seus pontos.
- (b) Encontre, se possível, parametrizações de M em redor dos pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$.
- (c) Esboce M e determine se M é uma variedade. Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e o espaço tangente em cada um dos seus pontos.
- (d) Calcule o máximo de $f(x, y) = x + y$ em M .
- (e) Seja $X(x, y) = (x/2, y/2)$. Calcule o fluxo de X através de M segundo a normal unitária exterior.

(2) Calcule:

(a)

$$\int_V \operatorname{div} f(x, y, z) \, dx dy dz$$

onde $f(x, y, z) = (-y \sin^2(x + y), x \sin^2(x + y), z)$ e

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x - y < 1, 0 < x + y < 1, 0 < z < 1\}.$$

(b)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx.$$

(3) Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a medida de Dirac em \mathbb{R} :

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

para qualquer $A \subset \mathbb{R}$, e m a medida de Lebesgue em \mathbb{R} .

(a) Mostre que $\mu = \delta_1 + \delta_2$ é uma medida e calcule

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} \, d\mu(x).$$

(b) Se para qualquer conjunto A mensurável à Lebesgue definirmos

$$\mu(A) = m(A \cap [1, 2])$$

(i.e. μ é a medida de Lebesgue em $[1, 2]$), determine

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} \, d\mu(x).$$

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$\mu_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} \delta_i.$$

Calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} \, d\mu_n(x).$$

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2016/2017

EXAME ÉPOCA DE RECURSO 31 Janeiro 2017

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todas as respostas

(1) Considere $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = \cos t(\cos t, \sin t) - \frac{1}{2}(1, 0).$$

- (a) Esboce $\Gamma = \gamma([0, \pi])$ e indique se é uma variedade.
- (b) Em cada ponto $(x, y) \in \Gamma$ determine uma normal unitária $\nu(x, y)$ tal que $\nu: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja contínua.
- (c) Calcule o integral de linha de ν ao longo de Γ .
- (d) Calcule o comprimento de Γ .

(2) Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{(x^2+y^2)^{5/4}}, dx dy.$$

(3) Considere

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3 \right)^2 + z^2 \leq 1, x > 0, y > 0 \right\}.$$

(a) Encontre o centróide de A usando as coordenadas toroidais:

$$\begin{cases} x = (3 + r \cos \varphi) \cos \theta \\ y = (3 + r \cos \varphi) \sin \theta \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

(b) Calcule o integral em A da divergência de

$$X(x, y, z) = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2} - 3}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-y, x, 0).$$

(4) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e os subconjuntos disjuntos não-vazios $A, B \subset \Omega$. Considere as σ -álgebras

$$\mathcal{F}_A = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$$

$$\mathcal{F}_B = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}.$$

(a) Dê um exemplo de uma função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que seja \mathcal{F}_B -mensurável mas não seja \mathcal{F}_A -mensurável.

(b) Indique a menor σ -álgebra para a qual a função $f = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B$ é mensurável.

(5) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \arctg(|x|^n + |y|^n) \, dx dy$$

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2017/2018

EXAME ÉPOCA NORMAL 8 Janeiro 2018

Duração máxima: 2 horas
Cada alínea vale 2 valores
Sem consulta, sem calculadora
Justifique todas as respostas

(1) Sejam $a, b > 0$. Considere os conjuntos

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2, x \leq 0\}$$

$$M_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, x > 0 \right\}$$

$$M = M_1 \cup M_2.$$

- (a) Determine se M_2 é uma variedade, indicando a sua dimensão e o espaço tangente em cada um dos seus pontos.
- (b) Encontre parametrizações de M em redor dos pontos $(0, a)$ e $(0, -a)$.
- (c) Determine se M é uma variedade, indicando a sua dimensão e o espaço tangente em cada um dos seus pontos.
- (d) Calcule o máximo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ em M para $a = 1$ e $b = 2$.
- (e) Seja $X(x, y) = (x/2, y/2)$. Calcule o fluxo de X através de M segundo a normal unitária exterior para $a = 1$ e $b = 2$.

(2) Calcule:

(a) o centróide de

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1\}.$$

(b)

$$\int_V \operatorname{div} f(x, y, z) \, dx dy dz$$

onde $f(x, y, z) = (-y \sin^2(x + y), x \sin^2(x + y), z)$ e

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x - y < 1, 0 < x + y < 1, 0 < z < 1\}.$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2/(1+n)} \, dx.$$

(d)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 - e^x} \, dx.$$

(3) Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a medida de Dirac em \mathbb{R} :

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

para qualquer $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \delta_n(A)$$

define uma medida de probabilidade.

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2017/2018

EXAME ÉPOCA DE RECURSO 30 Janeiro 2018

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todas as respostas

(1) Determine se

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

é uma variedade para cada um dos seguintes casos:

(a)

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1, & x < 0 \\ x + |y| - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

(b)

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^3).$$

(2) Considere

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right)^2 + z^2 \leq 1, z > 0 \right\}.$$

(a) Encontre o centróide de A usando as coordenadas toroidais:

$$\begin{cases} x = (3 + r \cos \varphi) \cos \theta \\ y = (3 + r \cos \varphi) \sin \theta \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

(b) Calcule o integral em A da divergência de

$$X(x, y, z) = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2} - 3}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-y, x, 0).$$

(3) Seja $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1 - 3t, 3t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (\cos(3\pi t - \frac{\pi}{2}), \sin(3\pi t - \frac{\pi}{2})), & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (3t - 2, 3t - 3), & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(a) Esboce $\Gamma = \gamma([0, 1])$ e indique se é uma variedade.

(b) Calcule

$$\int_{\Gamma} X \cdot d\gamma$$

para

$$X(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}(1, 0), & x < 0 \\ (1, 1), & x \geq 0. \end{cases}$$

(4) Calcule

(a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^{nx^2}} dx.$$

(b)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 - e^x} dx.$$

(5) Considere as medidas μ_1 e μ_2 num espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) , tais que

$$\mu_1(\Omega) = 2 \quad \text{e} \quad \mu_2(\Omega) = 10.$$

Dados $x, y \geq 0$ seja

$$\mu = x\mu_1 + y\mu_2.$$

(a) Encontre os valores de x e y para os quais μ é uma medida de probabilidade.

(b) Qual o máximo da função $\varphi(x, y) = xy$ quando x e y estão nas condições da alínea anterior?

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2018/2019

EXAME ÉPOCA NORMAL 4 Janeiro 2019

Duração máxima: 2 horas
Cada alínea vale 2 valores
Sem consulta, sem calculadora
Justifique todas as respostas

(1) Considere os seguintes conjuntos

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}.$$

- (a) Mostre que M é uma variedade, indicando a sua dimensão e o espaço normal em cada ponto.
- (b) Encontre uma parametrização de M e o espaço tangente em cada ponto.
- (c) Seja o campo vectorial

$$X(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2)}(1, 1, 0).$$

Calcule o fluxo de X através de M segundo a normal unitária com terceira coordenada positiva.

- (d) Determine se N é variedade e, em caso afirmativo, indique a dimensão e o espaço tangente em cada ponto.
- (e) Encontre e classifique os extremantes em N de

$$f(x, y, z) = xyz + (z - 1)^2.$$

- (2) Considere as medidas μ_1 e μ_2 num espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) , tais que

$$\mu_1(\Omega) = 2 \quad \text{e} \quad \mu_2(\Omega) = 10.$$

Dados $x, y \geq 0$ seja

$$\mu = x\mu_1 + y\mu_2.$$

- (a) Encontre os valores de x e y para os quais μ é uma medida de probabilidade.
 (b) Qual o máximo da função $\varphi(x, y) = xy$ quando x e y estão nas condições da alínea anterior?

- (3) Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$D_n = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}, 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Calcule:

- (a) o centróide de D_n .
 (b) o fluxo pela fronteira de D_n do campo vectorial

$$X(x, y, z) = \left(x^2y, \frac{x}{1+y^4}, \sqrt{z} \right).$$

- (c)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{D_n} xyz \, dx \, dy \, dz.$$

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2018/2019

EXAME ÉPOCA DE RECURSO 1 Fevereiro 2019

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todas as respostas

(1) Seja $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1 - 3t, 3t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (\cos(3\pi t - \frac{\pi}{2}), \sin(3\pi t - \frac{\pi}{2})), & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (3t - 2, 3t - 3), & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(a) Esboce $\Gamma = \gamma([0, 1])$ e indique se é uma variedade.

(b) Calcule

$$\int_{\Gamma} X \cdot d\gamma$$

para

$$X(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}(1, 0), & x < 0 \\ (1, 1), & x \geq 0. \end{cases}$$

(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$D_n = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}, 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Calcule:

(a) o centro de massa de D_n para a função densidade $\rho(x, y, z) = z^2$.

(b) o centro de massa da fronteira de D_n para a função densidade $\rho_n(x, y, z) = 1/2^n - x^2 - y^2$.

(c) o integral em D_n da divergência do campo vectorial

$$X(x, y, z) = \left(x^2 y, \frac{x}{1 + y^4}, \sqrt{z} \right).$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{D_n} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

onde $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável à Lebesgue.

(3) (a) Seja Ω um conjunto infinito e \mathcal{A} a coleção de todos os subconjuntos finitos de Ω . \mathcal{A} é uma σ -álgebra?

(b) Seja Ω um conjunto qualquer. Determine $\sigma(\{\{x\} : x \in \Omega\})$.

(4) Considere um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e funções $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis relativamente a \mathcal{F} e integráveis. Seja ainda $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ uma σ -álgebra e $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável relativamente a \mathcal{A} e integrável. Decida se as seguintes proposições são verdadeiras. Se sim, escreva uma demonstração. Se não, apresente um contra-exemplo.

(a) Se $\int_B f \, d\mu = \int_B g \, d\mu$ para qualquer $B \in \mathcal{F}$, então $f = g$ q.t.p.

(b) Se $\int_A f \, d\mu = \int_A h \, d\mu$ para qualquer $A \in \mathcal{A}$, então $f = h$ q.t.p.