

Todas as respostas devem ser dadas na folha de exame e detalhadamente justificadas.

BOA SORTE!

1. Sabe-se que o medicamento A, usualmente aplicado no tratamento de uma doença, é eficaz em 80% dos casos. Um novo medicamento para o tratamento da mesma doença foi introduzido, tendo-se verificado que, numa amostra de 100 indivíduos, foi eficaz em 85% dos casos. Se o novo medicamento tivesse a mesma proporção de eficácia do medicamento A, qual seria a probabilidade de obter 85% ou mais de sucessos numa amostra casual de tamanho 100? Comente sobre a eficácia do novo medicamento, relativamente ao usualmente aplicado. (1.0)
2. As perdas, em dezenas de milhares de euros, de uma companhia de seguros, sobre cada apólice do seguro de saúde, X , seguem uma distribuição de Pareto com parâmetro de escala igual a um, ou seja, X tem função densidade dada por
$$f(x|\alpha) = \alpha(1+x)^{-(1+\alpha)}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0.$$
 - (a) Encontre uma estatística suficiente para α . (1.5)
 - (b) Encontre o estimador de máxima verosimilhança para $1/\alpha$ e diga se é o mais eficiente. (2.0)
 - (c) Mostre que $Y = \ln(1+X)$ tem distribuição exponencial de parâmetro α e estude o enviesamento e consistência, em média quadrática, do estimador de máxima verosimilhança para $1/\alpha$. (1.5)
 - (d) Suponha que numa amostra de 100 apólices se obteve 3.2 como estimativa de máxima verosimilhança para α . Usando a distribuição assintótica dos estimadores de máxima verosimilhança, obtenha um intervalo de confiança aproximado a 95% para α . (1.5)
 - (e) Usando a amostra observada da alínea anterior, qual a estimativa de máxima verosimilhança da perda mediana por apólice? (1.0)
3. Considere uma amostra casual, Y_1, \dots, Y_n , extraída da população Y com distribuição exponencial. Mostre que a amplitude da amostra, $R = Y_{(n)} - Y_{(1)}$ (diferença entre o máximo e o mínimo amostrais), e o mínimo da amostra, $Y_{(1)}$, são independentes e obtenha a distribuição (função cumulativa ou função densidade) da amplitude amostral. (1.5)