INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL
Matemática 1, 2009/2010 - 2º Semestre
Exame em Época Normal, 31 de Maio de 2010 Duração: 2 horas

Nome: ______________________________

Nº de Aluno: __________ Curso: ____________________ Classificação: __________

Parte I

Pergunta	1	2	3	4	Total
Cotação	1.5	1.5	1.5	1.5	6.0
Class.					

Parte II

Pergunta	1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d	3e	3f	3g	4a	4b	Total
Cotação	2.0	1.0	0.5	0.5	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	1.0	1.0	14.0
Class.															

PARTE I: Perguntas de escolha múltipla (6 valores)

Cada resposta correcta vale 1,5 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0,5 valores.

A cotação mínima na primeira parte é de zero valores.

1. Sejam os vectores $\vec{a} = (0, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, 0)$ e $\vec{c} = (0, 0, k)$, com $k \in \mathbb{R}$. Para que valores de k temos que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ formam um conjunto de vectores linearmente independentes?

   □ $k = 0$ □ $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

   □ $k \in \mathbb{R}$ □ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

2. Seja $x \in \mathbb{R}$. A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2(\sin x)^n$ é convergente se:

   □ $x \in \mathbb{R}$ □ $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

   □ $x \in [0; 2\pi]$ □ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

3. Seja a função $f(x) = \ln x^2$, e seja g a sua função inversa para $x > 0$. Temos que $g'(1)$ é igual a:

   □ $\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ □ 2

   □ $\dfrac{2}{e}$ □ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

4. Considere o conjunto $C=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x) \leq y \leq g(x)\}$, onde $f(x)=x^2 - 1$, e $g(x) = -x^2 + 1$. A área de C é igual a:

   □ $\dfrac{8}{3}$ □ $\dfrac{4}{3}$

   □ 0 □ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

PARTE II: Perguntas de desenvolvimento (14 valores)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja o sistema de equações: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y-\alpha z=2 \\ -x+y+2z=\beta \end{cases}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (a) Classifique este sistema em função dos valores de α e β, indicando, nos casos adequados, o número de graus de liberdade.
   (b) Resolva este sistema para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$.

2. Sejam $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, e sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n.
   (a) Defina a distância $d(\vec{x}, \vec{y})$.
   (b) $d(\vec{x}, \vec{y})$ é uma função? Justifique a sua resposta.
   (c) Demonstre que se A e B são invertíveis, então AB também é invertível.

3. Seja a função $f(x) = x^2 e^x$.
   (a) Indique o domínio de f e discuta a sua continuidade.
   (b) Utilizando a definição de derivada, mostre que $\dfrac{df(0)}{dx} = 0$.
   (c) Determine os pontos de estacionariedade de f.
   (d) Determine os pontos de extremo de f através do estudo da sua segunda derivada.
   (e) Discuta se os pontos de extremo obtidos anteriormente são globais.
   (f) Calcule a aproximação quadrática de f em torno de $x = 0$.
   (g) Calcule uma primitiva de f: $\displaystyle\int x^2 e^x dx$.

4. Sejam $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \backslash \{0\}$ funções contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}^+$.
   (a) Demonstre que $El_x(f.g) = El_x(f) + El_x(g)$.
   (b) Considere $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \ln(x^2+2)$. Calcule $El_x(f[g(x)])$.