

Análise Matemática II

LISTA 1 ¹

(1) Ler capítulos II.2.1 e II.2.2 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*.

(2) Calcule a soma das seguintes séries:

(a) $\sum_{n \geq 1} 2^{-n}$

(b) $\sum_{n \geq 1} 3^{-(5n+1)}$

(3) (Séries de Mengoli) Prove que se $\lim a_n$ existe e é finito, então a série

$$\sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n+k})$$

é convergente e a sua soma é $a_1 + a_2 + \dots + a_k - k \times \lim a_n$.

(4) Calcule a soma das seguintes séries:

(a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+k)}, k \in \mathbb{N}$

(b) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

(c) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}$

(5) Sendo a_n uma sucessão real tal que $a_n \rightarrow +\infty$, indique a natureza da série

$$\sum \frac{a_n}{1+a_n}.$$

(6) Utilizando o critério de comparação ou um dos seus corolários, estude a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1 + (-1)^n}{n^2}$

(b) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

(c) $\sum_{n \geq 1} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}}$

(d) $\sum_{n \geq 1} \frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)^3 \sqrt[3]{n^2+n}}$

(e) $\sum_{n \geq 1} (n - \sqrt{n^2-1})$

¹As questões mais difíceis encontram-se marcadas com *.

$$(f) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$$

$$(g) \sum_{n \geq 1} \frac{\log(n)}{n^3}$$

- (7) Utilize o critério do integral (ver Teorema 4 – V.3.1) para decidir sobre a convergência da série:

$$\sum_{n > 1} \frac{1}{n \log(n)}.$$

- (8) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes de termos positivos. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right).$$

$$(b) \sum \frac{n+1}{n} a_n.$$

- (9) Estude, quanto à natureza, a série de termo geral $\frac{a^n}{1+b^n}$ nos seguintes casos:

$$(a) 0 < a < b$$

$$(b) 0 < b \leq a < 1$$

$$(c) 1 \leq b \leq a.$$

- (10) Sejam a_n e b_n duas sucessões de termos positivos tais que as séries $\sum a_n$ e $\sum (b_n - b_{n+1})$ são convergentes. Mostre que $\sum (a_n b_n)$ é também uma série convergente.

- (11) (a) *Mostre que a sucessão

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

é crescente. *Sugestão:* Use o binômio de Newton $(a+b)^n =$

$$\sum_{k=0}^n C_k^n a^k b^{n-k} \text{ com } C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- (b) Para cada valor de $c > 0$, estude a convergência da série

$$\sum \frac{c^n n!}{n^n}.$$

Sugestão: Use a alínea anterior para estudar o caso $c = e$ pelo critério da razão.