

Análise Matemática II

LISTA 3

- (1) (a) Prove que se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum a_n^2$ também é absolutamente convergente.
- (b) Dê exemplos de a_n tais que:
- (i) $\sum a_n^2$ é absolutamente convergente e $\sum a_n$ diverge.
 - (ii) $\sum a_n$ é simplesmente convergente e $\sum a_n^2$ diverge.
 - (iii) $\sum a_n$ é simplesmente convergente e $\sum a_n^2$ é absolutamente convergente.
- (2) Seja u_n uma sucessão convergente tal que $u_n u_{n+1} < 0$, $n \in \mathbb{N}$.
- (a) Indique $\lim u_n$.
 - (b) Prove que se $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, então $\sum u_n$ é convergente com soma entre u_1 e $u_1 + u_2$.
- (3) Ler capítulos III.2.4, V.2.2 e IV.2.1 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*.
- (4) Estude a convergência pontual e uniforme das seguintes sucessões de funções nos intervalos dados:
- (a) $f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx^4 + 2n}$ em \mathbb{R}
 - (b) $f_n(x) = \frac{x^n}{n+1}$ em $[0, 1]$
 - (c) $f_n(x) = \frac{nx}{n+x^2}$ em $] -1, 1[$ e \mathbb{R}
 - (d) $f_n(x) = \frac{2n^2x^2}{1+2n^2x^2}$ em $[-3, +\infty[$ e $[3, +\infty[$
 - (e) $f_n(x) = \frac{ne^x}{1+ne^x}$ em $] -\infty, -1]$ e $[1, +\infty[$
 - (f) $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x+1}{n}\right)$ em \mathbb{R}
- (5) Dada a sucessão $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, mostre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right) \neq \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Que conclusão pode tirar acerca da convergência uniforme de f_n em $[0, 1]$?

- (6) Seja f_n a sucessão de funções definida por

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}.$$

(a) Calcule o limite pontual de f_n no intervalo $[0, 1]$ e indique se a convergência é uniforme nesse mesmo intervalo.

(b) Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

(7) Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a função $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x).$$

Determine os valores de α para os quais:

(a) $f_n \rightarrow 0$ pontualmente.

(b) $f_n \rightarrow 0$ uniformemente.

(c) $\int_0^1 f_n \rightarrow 0$.

(d) $f'_n \rightarrow 0$ pontualmente.

(e) $f'_n \rightarrow 0$ uniformemente.

(8) Estude a convergência uniforme das seguintes séries nos seus domínios:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} x(1-x)^n$