

Análise Matemática II

LISTA 5

(1) Desenvolva em série de potências $\sum a_n(x-x_0)^n$ as seguintes funções, indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido:

(a) $f(x) = \log(3-x)$, $x_0 = 1$.

(b) $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = -1$.

(c) $f(x) = x^2 \log x^2$, $x_0 = 1$.

(2) Considere a série de potências $S(x) = \sum_{n \geq 1} (2n+1)x^{2n}$.

(a) Mostre que é convergente no intervalo $] -1, 1[$.

(b) Prove que $S(0)$ é um mínimo relativo de S .

(c) Calcule S .

(3) Mostre que a série de funções

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n-1}} \right)$$

converge em $[0, 1]$ pontualmente mas não uniformemente.

(4) Seja $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{4}{3x}.$$

(a) Desenvolva f em série de potências de $(x-2)$, indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.

(b) Determine $f^{(17)}(2)$.

(5) Escreva a série de Taylor em 0 das seguintes funções:

(a) $f(x) = a^x$, $a > 0$

(b) $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$

(c) $f(x) = \arctan(x)$

(6) Considere a função $f(x) = e^x$.

(a) Calcule a sua série de Taylor S_f em 0 e prove que f é analítica em \mathbb{R} .

(b) Aproveite o resultado anterior para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

(7) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ considere

$$f(x) = (1+x)^\alpha.$$

(a) Determine a sua série de Taylor S_f no ponto 0.

(b) Indique o intervalo de convergência de S_f .

(c) * Prove que f é analítica em $] - 1, 1[$.

Sugestão: Mostre que $S_f = f$ estudando a derivada da função $\varphi(x) = S_f(x)/f(x)$.

(8) Ler capítulo 2 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise em \mathbb{R}^n* .

(9) Represente geometricamente os seguintes conjuntos e indique o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de cada:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq y + x \leq 1\}$

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$

(10) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções, represente-o geometricamente e decida se é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

(a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = \left(\frac{1}{1 - \log(x^2 + y^2)}, \sqrt{x - y} \right)$

(b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{\sqrt{(2 - \sin x)(y - x^2)}}{\log(x + y - 2)}$

(c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \log(xy) \sqrt{1 - x^2 - (y - 1)^2}$