

Análise Matemática II

LISTA 6

(1) Considere

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}.$$

- (a) Dê um exemplo de uma sucessão de pontos em X que convirja para um ponto fora de X .
- (b) Poderia encontrar uma sucessão de pontos que não pertencem a X convergente para um ponto de X ?

(2) Ler capítulo 3.2 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise em \mathbb{R}^n* .

(3) Calcule ou prove que não existem os seguintes limites:

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y^2}{x - y}$
- (c) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,0)} \frac{x + y - 2}{xyz}$
- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^8 + (y - x^2)^2}{x^5}$
- (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^3 + y - 1}{3x^3 + y^3 - 1}$
- (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\log^2(x + y)}{\sin(\log(x + y))}$

(4) Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x + y}.$$

- (a) Determine o domínio D de f .
- (b) Para cada $m \in \mathbb{R}$ e cada $k \in \mathbb{N}$ seja

$$A_{k,m} = \{(x, y) \in D : y = mx^k\}.$$

Calcule, para cada par $(k, m) \neq (1, -1)$ o limite de f no ponto $(0, 0)$ relativo ao conjunto $A_{k,m}$.

(c) Considere o conjunto

$$B = \{(x, y) \in D : y = -x + x^2\}$$

e calcule o limite de f no ponto $(0, 0)$ relativo ao conjunto B .

(d) Que pode concluir sobre a existência de limite de f no ponto $(0, 0)$?

(5) Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} + \alpha, & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } y \neq x \\ \frac{x^2+1}{y^2+1} - \alpha, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- (a) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ supondo que f tem limite no ponto $(1, 1)$.
 (b) * Mostre que o limite existe.

(6) Mostre que não existe

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,0)} \frac{z + (x-1)z + z^2}{1 - xy + zx}.$$

(7) Considere a função $f(x, y) = x \log(xy)$.

- (a) Determine o domínio D de f e indique, se possível, uma sucessão no domínio de f cujo limite não pertence ao domínio de f .
 (b) Mostre que para qualquer semirecta S colocada na origem e contida no domínio de f , o valor do limite de f na origem relativo ao conjunto S é sempre o mesmo.
 (c) Prove que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Sugestão: Estude o limite relativo ao conjunto

$$\{(x, y) \in D: y = e^{-\frac{1}{x^2}}\}.$$