Análise Matemática II

LISTA 7

(1) Considere $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \bar{D}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Mostre que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ sse para qualquer $i = 1, \dots m$ verifica-se $\lim_{x\to a} f_i(x) = b_i$.

(2) Seja $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, dada por $f(x,y) = (x^2+y)\sin(\frac{1}{xy})$.

(a) Justifique que não existem os limites:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y).$$

(b) Prove que existe limite de f em $(0,0)$ e conclua que pode existir limite de uma função num ponto sem que existam os limites iterados.

(3) Ler capítulo 3.1 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise em* $\mathbb{R}^n$.

(4) Considere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} k + e^{-\frac{1}{|x^2+y^2-4|}}, & x^2+y^2 > 4 \\ 5, & x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$$

Determine o valor de k de modo que $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

(5) Verifique se as seguintes funções podem ser prolongáveis por continuidade a $\mathbb{R}^2$, e nesse caso indique os prolongamentos contínuos a $\mathbb{R}^2$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

(b) $g(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$

(c) $h(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x-y}$

(6) Dê um exemplo de $f \in C^0(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, tal que:

(a) $f\left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}\right) = [0,2]$

(b) $f\left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}\right) =]0,4]$

(c) $f\left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}\right) =]0,4]$

(d) $f\left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}\right) =]0,4] \cup \{5\}$

(7) Determine os pontos de descontinuidade das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2}, & x \neq 0,\, x \neq 1 \\ 1+y, & x = 0 \\ y, & x = 1 \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} (y^2-4y+3)\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(8) Considere $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x(2-\sin(x))}{1-|y|}}.$$

(a) Determine o domínio D de f e represente-o geometricamente.

(b) Defina analiticamente a fronteira de D e indique se D é aberto ou fechado.

(c) Indique se f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,1)$.

(9) Estude a continuidade uniforme das seguintes funções nos conjuntos indicados:

(a) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ em

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 4\}$$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ em $A = \{(x,y)\colon y > 0\}$ e

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1 \leq y \leq 2\}$$

(10) Sejam $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$. Determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições, dando uma prova ou um contra-exemplo. *Sugestão:* Para os contra-exemplos basta tomar $n = m = 1$.

(a) Se f é C^0, então $f^{-1}(B)$ é fechado sempre que B é fechado.

(b) Se f é C^0, então $f(A)$ é aberto sempre que A é aberto.

(c) Se f é C^0, então $f(A)$ é limitado sempre que A é limitado.

(d) Se $f(A)$ é limitado sempre que A é limitado, então f é C^0.