Análise Matemática II

LISTA 8

(1) Ler capítulos 4.1 e 4.2 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise em* $\mathbb{R}^n$.

(2) Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem para as seguintes funções, indicando o respectivo domínio:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin(xy), & x \neq 0 \\ y^2 - y, & x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - yx, & y \neq x \\ x, & y = x \end{cases}$

(3) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy = 0 \\ \sqrt{x^2+y^2}, & xy \neq 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Prove que não existe $D_v f(0,0)$, qualquer que seja o vector $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $v_1 v_2 \neq 0$.

(c) O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$?

(4) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy = 0 \\ x+y, & xy \neq 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e $D_{(1,1)}f(0,0)$.

(b) Calcule as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, indicando em que domínio é que estão definidas.

(c) Que pode concluir sobre a diferenciabilidade da função f no ponto $(0,0)$?

(5) Seja f uma função real diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x,y) = f(y,x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Prove que para $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(b,a).$$

(b) Calcule $D_{(1,-1)}f(c,c)$, para $c \in \mathbb{R}$.

(6) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f.

(b) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

(c) Calcule o gradiente de f no ponto $(1,1)$.

(d) Sendo $u = (-1,1)$, calcule $D_u f(1,1)$.

(7) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estude f quanto à continuidade e diferenciabilidade.

(8) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x^3 + 2(y-1)^2 - x^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}, & (x,y) \neq (0,1) \\ 2, & (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f.

(b) Para o vector $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ calcule $D_v f(0,1)$.

(c) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,1)$.

(9) Para cada função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ indique os pontos onde é diferenciável.

(a) $f(x,y) = xy|x-y|$.

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$