Probabilidades – Exercícios

Capítulo 1

1. Uma caixa contém 5 lâmpadas, das quais duas são defeituosas. As lâmpadas defeituosas estão numeradas de 1 a 2 e as não defeituosas estão numeradas de 3 a 5. Extraem-se 2 lâmpadas, ao acaso, uma a seguir à outra e sem reposição (com reposição).

a) Enumere os acontecimentos elementares do espaço de resultados associado à experiência.
b) Defina no espaço de resultados os acontecimentos adiante indicados:
A1 - "saída de uma lâmpada defeituosa na 1ª tiragem";
A2 - "saída de uma lâmpada defeituosa na 2ª tiragem";
A3 - "saída de duas lâmpadas defeituosas";
A4 - "saída de pelo menos uma lâmpada defeituosa";
A5 - "saída de exatamente uma lâmpada defeituosa";
A6 - "saída de uma soma de números inscritos nas lâmpadas inferior a sete".

2. Duas lâmpadas vão ser submetidas a um teste, que consiste em mantê-las ligadas até que ambas falhem. Sabe-se que nenhuma das lâmpadas dura mais de 1600 horas.
Represente o espaço de resultados e os seguintes acontecimentos:
A - Realiza-se quando nenhuma das lâmpadas tem duração superior a 1 000 horas;
B - Realiza-se quando só uma das lâmpadas tem duração superior a 1 000 horas;
C - Realiza-se quando uma das lâmpadas dura, pelo menos, o dobro da outra;
D - Realiza-se quando a soma das durações das duas lâmpadas é inferior a 2 000 horas.

3. Sejam A, B e C três acontecimentos. Em função de A, B e C, exprima o acontecimento que se realiza quando:
a) apenas A se realiza.
b) A e C se realizam, mas B não.
c) pelo menos, um dos três se realiza.
d) pelo menos, dois deles se realizam.
e) se realizam os três.
f) nenhum deles se realiza.
g) quando muito, realiza-se um deles.
h) no máximo, realizam-se dois deles.
i) realizam-se exatamente dois deles.
j) no máximo, realizam-se os três.

4. Sejam A1 e A2 dois acontecimentos, tais que:
A1 se realiza quando um automobilista escolhido ao acaso numa bomba verifica o ar dos pneus;
A2 se realiza quando um automobilista escolhido ao acaso numa bomba verifica o óleo do motor.
a) Exprima em função deles os seguintes acontecimentos:
A - realiza-se quando o automobilista não verifica o ar dos pneus;
B - realiza-se quando o automobilista verifica o ar dos pneus ou o óleo do motor;
C - realiza-se quando o automobilista não verifica o ar dos pneus nem o óleo do motor;
D - realiza-se quando o automobilista não verifica o ar dos pneus, ou verifica o óleo do motor;
E - realiza-se quando o automobilista verifica o ar dos pneus e não verifica o óleo do motor;
F - realiza-se quando o automobilista verifica o óleo do motor e não verifica o ar dos pneus;
G - realiza-se quando o automobilista verifica um e um só dos equipamentos.
b) Os acontecimentos E e F são ou não incompatíveis?
c) Exprima G em função de E e F.
d) A realização de A implica a realização de F, ou o contrário?

5. Numa cidade são publicados três semanários, S1, S2 e S3. Sabe-se que:
22% dos habitantes lêem S1;
15% dos habitantes lêem S2;
13% dos habitantes lêem S3;
8% dos habitantes lêem S1 e S2;
5% dos habitantes lêem S1 e S3;
4% dos habitantes lêem S2 e S3;
2% dos habitantes lêem os três semanários.

Calcule a probabilidade de um habitante da cidade, escolhido ao acaso:

a) Ler pelo menos um semanário.
b) Ler um e um só semanário.
c) Não ler nenhum dos semanários.

6. Para cada n inteiro positivo, seja $P(\{n\}) = (1/2)^n$. Considere os acontecimentos $A = \{n : 1 \leq n \leq 10\}$, $B = \{n : 1 \leq n \leq 20\}$, $C = \{n : 11 \leq n \leq 20\}$.
Calcule $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(C)$ e $P(\overline{B})$.

7. Sejam A e B dois acontecimentos definidos num mesmo espaço de resultados. Mostre que:

$$P\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

8. Para qualquer sucessão de acontecimentos $A_1, A_2, \dots, A_n$, defina uma nova sucessão, B1, $B_2, \dots, B_n$, de acontecimentos mutuamente exclusivos, tais que $\bigcup_{1}^{n} A_i = \bigcup_{1}^{n} B_i$.

9. Numa fábrica são utilizadas três máquinas para a produção de um mesmo produto, nas seguintes percentagens: Máquina 1: 40%; Máquina 2: 35%; Máquina 3: 25%. As percentagens de artigos defeituosos produzidos por cada máquina são, respetivamente, 4%, 2% e 1%.
Em certo momento retirou-se um artigo da produção total.

a) Qual a probabilidade de ser não defeituoso?
b) Observando-se que é defeituoso, qual a probabilidade de ter sido produzido pela Máquina 1?

10. Os trabalhadores de uma dada empresa foram classificados em três níveis: com formação mínima, com formação média e com formação superior. Sabe-se que 55% desses trabalhadores têm salário superior a 1000. Sabe-se também que:
    - 40% dos trabalhadores com formação média têm salário superior a 1 000;
    - 70% dos trabalhadores com formação superior têm salário superior a 1 000;
    - Nenhum dos trabalhadores com formação mínima tem salário superior a 1 000;
    - 10% dos trabalhadores têm formação mínima.

a) Calcule a probabilidade de um trabalhador, escolhido ao acaso nessa empresa, ter formação média.
b) Calcule a probabilidade de ter formação superior, sabendo que ganha mais de 1000.

11. Para se destruírem os produtos deteriorados, analisa-se periodicamente certa produção. No processo, que não é infalível, 10% dos artigos não deteriorados são destruídos e 5% dos produtos deteriorados não são destruídos, destruindo-se na totalidade 27% da produção.

a) Qual a percentagem de artigos deteriorados e destruídos?
b) Qual a percentagem da produção em boas condições?
c) Qual a percentagem de artigos deteriorados e não destruídos?

12. Numa fábrica trabalham 30 mulheres e 50 homens. A distribuição dos trabalhadores por classes de idades é a seguinte:

	H	M
até 21 anos	5	3
de 21 a 50 anos	30	18
mais de 50 anos	15	9

Escolhe-se uma pessoa ao acaso.

a) Qual a probabilidade de a pessoa escolhida ser homem, sabendo-se que tem mais de 50 anos?
b) Os acontecimentos A: "a pessoa escolhida é homem" e B: "a pessoa escolhida tem mais de 50 anos" são independentes? Justifique.

13. Na produção de certo tipo de peças constata-se que 3% são defeituosas. O controlo de qualidade instalado permite detetar 95% das peças defeituosas, embora também classifique como tal 4% das peças sem defeito.

a) Qual a percentagem de peças rejeitadas no controlo de qualidade?

b) “A maior parte das peças rejeitadas não têm defeito.” Comente.

14. Um estudo sobre tabagismo numa grande multinacional conduziu aos seguintes resultados: um quarto dos trabalhadores com menos de 30 anos são fumadores, tal como metade dos trabalhadores entre 30 e 50 anos e metade dos trabalhadores com 50 ou mais anos. Os trabalhadores com menos de 30 anos constituem 50% do pessoal da empresa.

a) Escolhido um trabalhador ao acaso, qual a probabilidade de ser fumador?

b) Qual a probabilidade de um trabalhador escolhido ao acaso ter idade inferior a 30 anos, sabendo-se que é fumador? Face a este resultado, que pode dizer sobre a relação entre a idade e o consumo de tabaco na população estudada?

15. Numa experiência de aprendizagem um indivíduo realiza duas vezes seguidas uma determinada tarefa, podendo falhar ou ser bem-sucedido em cada uma delas. A probabilidade de falhar a primeira tentativa é de 0.25. Se falhar a primeira, a probabilidade de ser bem-sucedido na segunda é de 0.5. Se for bem-sucedido na primeira, a probabilidade de falhar na segunda é de 0.1.

Qual a probabilidade de falhar a segunda tentativa?

16. Considere dois acontecimentos, *A* e *B*. Mostre que, se $P(B|A) = P(B|\overline{A})$, então *A* e *B* são independentes.

17. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e considerem-se $A, B, C \in \mathcal{A}$, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. Se *B* e *C* são independentes, demonstre que,

P(A½B) = P(A½B Ç C)P(C) + P(A ½B Ç $\overline{C}$ *)P(*$\overline{C}$ *)* .

18. Considere-se uma experiência aleatória com espaço de resultados $\Omega = [-1,1]$ e a sucessão de acontecimentos $\{A_n\}$, de termo geral $A_n = \begin{cases}]-1/n,1[, & n \text{ ímpar} \\ ]-1,1/n[, & n \text{ par} \end{cases}$.

Calcule, se existir, o limite da sucessão $\{A_n\}$.

19. Considere-se uma experiência aleatória com espaço de resultados $\Omega =]-2,2[^2$ e a sucessão de acontecimentos $\{A_n\}$, de termo geral $A_n = \left\{(x,y): x^2 + y^2 < (1-1/n)^2\right\}$.

a) Calcule, se existir, o limite da sucessão $\{A_n\}$.

b) Ilustre o teorema T14, sabendo que $P(A_n) = \frac{1}{4}\pi\,(1-1/n)^2$, ou seja, a probabilidade de A_n se realizar corresponde a ¼ da área do círculo com raio 1-1/*n*.

c) Redefina a medida de probabilidade $P(A_n)$, de acordo com a hipótese de que a probabilidade está uniformemente distribuída em $\Omega =]-2,2[^2$ e calcule $P(\Omega \setminus \lim A_n)$.

d) Admita que $\Omega =]-c,c[^2, c > 0.$ Determine *c*, de modo a conservar a medida de probabilidade $P(A_n)$ dada e assumindo a hipótese de que a probabilidade está uniformemente distribuída em Ω.

e) Volte a resolver a) e b), admitindo que $A_n = \left\{(x,y): x^2 + y^2 < (1+1/n)^2\right\}$. Comente cuidadosamente.

Capítulo 2

20. Uma caixa contém 5 bolas pretas, 3 azuis e 7 vermelhas. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar 2 bolas da caixa, ao acaso, sucessivamente e sem reposição. Sabendo que está estabelecida a pontuação: bola preta, 1 ponto; bola azul, 2 pontos; bola vermelha, 3 pontos, caracterize uma variável aleatória X que represente a pontuação obtida.
    a) Qual o acontecimento que é a imagem inversa de [3,5)?
    b) Determine a função de distribuição de X.
    c) Calcule *P(X >* 3½*X* < 6*)*.

21. O número de automóveis encomendados mensalmente num stand é uma v.a. X com a seguinte função de probabilidade:

x:	0	1	2	3	4
$f(x)$:	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1

    a) Escreva a função de distribuição de X .
    b) Quantos automóveis deve o stand ter num mês, para que a probabilidade de satisfazer todas as encomendas não seja inferior a 0.75?
    c) Num mês em que há três automóveis em stock no stand, qual a distribuição da variável aleatória que representa a diferença, em valor absoluto, entre a procura e o stock?

22. Numa loja da especialidade a procura diária de rádios para automóvel é uma variável aleatória, X, com função de probabilidade:

x:	0	1	2	3	4
$f(x)$:	0.2	p_1	p_2	0.2	0.1

Sabe-se ainda que são procurados 2 rádios, em metade dos dias em que a procura é superior a 1.
    a) Calcule p_1 e p_2, justificando.
    b) No início de certo dia existem apenas 2 rádios do modelo referido. Calcule a probabilidade de serem vendidos (admita que a procura coincide com a venda sempre que existe o produto procurado).
    c) Em relação à alínea b) obtenha a distribuição da variável "número de rádios vendidos".

23. Um teste é composto por 20 questões, cada uma das quais com quatro respostas alternativas (apenas uma delas é correta). Cada resposta certa vale 1 valor. Uma pessoa responde completamente ao acaso a cada uma das questões. Escreva a distribuição da variável aleatória que representa a classificação obtida nestas condições.

24. Seja X uma v.a. com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} & 0 < x < 2 \\ \\ 1 - \dfrac{x}{4} & 2 < x < 4 \end{cases}$$

    a) Obtenha a função de distribuição de X.
    b) Determine a densidade de $Y = 8 - 2X$.
    c) Supondo que X representa a procura mensal (em toneladas) de certo artigo, determine o stock mínimo a constituir no início de cada mês, de modo que a probabilidade de ruptura seja igual a 5%.

25. Seja X uma variável aleatória com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 1/2, & 1<x<2 \end{cases}$$

a) Calcule a função de distribuição.
b) Calcule a função de densidade das variáveis aleatórias:

$$i) Y = 4X - 2 \qquad ii)\ W = (X+1)^2 \qquad iii)\ Z = 2 - X.$$

c) Calcule a função de distribuição da variável aleatória seguinte e classifique-a:

$$U = \begin{cases} -1, & X < 0.5 \\ 0, & 0.5 < X < 1.5 \\ 1 & X > 1.5 \end{cases}.$$

26. Admita que o tempo de permanência dos alunos numa aula de 2 horas é uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade $f(x) = 1 - x/2, \quad 0 < x < 2$.
a)Qual a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, assistir a mais de 75% da aula?
b) De 10 alunos, escolhidos ao acaso no conjunto dos que estão presentes no início da aula, qual a probabilidade de apenas 1 permanecer na sala quando faltarem 15 m para a aula terminar?

27. Seja X uma variável aleatória com f.d.p. $f(x) = kx^2, \quad -1 < x < 1.$
a) Mostre que $k = 1.5$.
b) Sabendo que X é positiva, e utilizando a função de distribuição, calcule a probabilidade de ser X maior que 0.5.
c) Obtenha a função de distribuição da variável aleatória Y que concentra os valores negativos de X no ponto 0 e mantém sem alteração os positivos.
d) Se $Z = \dfrac{|X^3+1|}{2}$, verifique que a respetiva f.d.p. é $f(z) = 1, \quad 0 < z < 1$.

28. Um cliente de uma livraria que deseje comprar livros estrangeiros inexistentes em stock faz a respetiva encomenda ao balcão. O número de encomendas semanais feitas nestas condições, para livros em Inglês e Francês, é um vetor aleatório (X,Y) com a seguinte distribuição conjunta:

Y\X	0	1	2	3
0	.01	.02	.04	.03
1	.05	.10	.20	.15
2	.04	.08	.16	.12

a) Qual a probabilidade de numa semana serem encomendados, no máximo, 2 livros em Inglês e 1 livro em Francês?
b) Qual a percentagem de semanas em que existe igual número de pedidos de livros em Inglês e em Francês?
c) Determine as distribuições marginais e diga qual o seu significado.
d) Qual a distribuição da variável aleatória “número de livros encomendados nas duas línguas”?

29. Uma máquina produz determinado tipo de componentes eletrónicos. Esses componentes podem ter um, e um só, de dois tipos de defeitos (A ou B), com probabilidades 0.07 e 0.03, respetivamente. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso, e com reposição, dois componentes da produção da máquina. Considere as seguintes variáveis aleatórias:

X: v.a. que representa o número de defeitos do tipo A encontrados nos dois componentes;
Y: v.a. que representa o número de defeitos do tipo B encontrados nos dois componentes.

a) Construa a função de probabilidade conjunta de (X, Y).
b) Determine as distribuições marginais e analise a independência das variáveis.
c) Calcule a probabilidade de se encontrar no conjunto dos dois componentes um defeito do tipo B, sabendo que nenhum dos componentes apresenta defeito do tipo A.
d) Encontre a distribuição do número total de defeitos encontrados nos dois componentes.

30. Considere uma caixa com 10 bolas, 5 das quais são pretas. Uma experiência aleatória consiste em lançar um dado perfeito e extrair da caixa, sem reposição, um número de bolas igual à pontuação obtida no lançamento do dado. Qual a probabilidade de todas as bolas extraídas serem pretas?

31. Sabe-se que a intensidade sonora do ruído ambiente em duas ruas, A e B, é um vetor aleatório (X,Y), cujo comportamento pode ser descrito pela densidade conjunta

$$f(x,y) = kx^2(1-y), \qquad 0<x<1, \qquad 0<y<1.$$

a) Calcule k.
b) Investigue a independência das variáveis.

32. Uma empresa dedica-se ao comércio de diversos artigos, cujas vendas têm comportamentos aleatórios. As vendas mensais do artigo A e do artigo B, expressas em dada unidade monetária, constituem o vetor aleatório (X, Y), cuja f.d.p. conjunta é

$$f(x,y) = 1/k, \qquad 0 < x < 2, \quad 0 < y < x.$$

a) Determine a constante k. Estude a independência entre as variáveis.
b) Determine a percentagem de meses em que as vendas totais dos artigos A e B são superiores a 1 unidade monetária.
c) Determine a percentagem de meses em que tanto as vendas do artigo A como as do artigo B são superiores a 1 unidade monetária.
d) Determine a percentagem de meses em que as vendas do artigo A são superiores a 1 unidade monetária.
e) Determine a f.d.p. das vendas do artigo B condicionadas pelas vendas do artigo A.
f) Determine a f.d.p. das vendas do artigo A condicionadas pelas vendas do artigo B e calcule $P(0.5 < X < 1 | Y = 0.75)$.

33. Considere duas variáveis aleatórias com a seguinte f.d.p. conjunta:

$$f(x,y) = k(1-x-y), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1-x.$$

a) Determine a constante k.
b) Calcule as funções de densidade marginais e discuta a independência das v.a.
c) Calcule $P(X + Y < 0.5)$
d) Determine as distribuições condicionadas.

34. Considere que o rendimento mensal (em milhares) dos casais sem filhos, que vivem em determinada região, é uma v.a. bidimensional (X, Y), sendo X o rendimento da mulher e Y o rendimento do marido. Considere ainda a função $f(x,y) = 1/a, \quad 0 < x < b, \quad x < y < b$.
a) Encontre a relação existente entre a e b que faz da função acima uma f.d.p. conjunta.
b) Admita que $a = 8$ e $b = 4$. Encontre a distribuição do rendimento mensal do marido.
c) Determine a probabilidade do rendimento mensal de um casal ultrapassar os 5 000.

35. Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional, em que X representa a quantidade semanal (tons.) vendida do produto A e Y representa a quantidade semanal (tons.) vendida do produto B. A f.d.p. conjunta é

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}, \qquad x > 0, y > 0.$$

a) Calcule a percentagem de semanas em que as vendas do produto A são superiores às vendas do produto B.
b) Obtenha a função de densidade das vendas do produto A, condicionadas pelas vendas do produto B. Que pode concluir sobre a independência entre as duas variáveis?

36. Sendo (X_1,X_2) um par aleatório, tal que $f(x_1,x_2) = 1$, $(x_1,x_2) \in [0,1]^2$, determine a f.d.p da v.a. $Y_1 = X_1 \times X_2$.

37. Uma pessoa toma diariamente um comboio que parte entre as 7:25 e as 7:30. A v.a. que representa o período de tempo (em minutos) que decorre entre as 7:25 e o momento da partida tem f.d.p.

$$f(x) = \frac{2}{25}(5 - x), \quad 0 < x < 5$$

A hora de chegada da pessoa à estação é também aleatória, entre as 7:25 e as 7:30, e não há razões para se supor que certos momentos tenham maior densidade de probabilidade do que os outros. Admitindo independência entre as duas v.a., determine:

a) a f.d.p. e a f.d. conjuntas das duas v.a..
b) a probabilidade de a pessoa apanhar o comboio, usando a distribuição conjunta.
c) a probabilidade de a pessoa apanhar o comboio, fazendo a conveniente mudança de variáveis.
d) a probabilidade de a pessoa ter que esperar mais de 2 minutos até à partida do comboio, também por um e outro dos dois processos.

38. Seja X o tempo de espera de um cliente, até ser atendido aos balcões do Banco A, e seja Y o tempo de espera de um cliente, até ser atendido aos balcões do Banco B (o tempo medido em certa unidade). A distribuição conjunta de X e Y é dada por $f(x,y) = 4ye^{-(x+2y)}, \ x > 0, \ y > 0$.
Calcule a distribuição de $U=X-Y$ e, a partir dela, estude se se deve acreditar que os clientes do Banco A demoram mais tempo a ser atendidos do que os do Banco B.

39. O vetor aleatório (X,Y) tem f.d.p. conjunta $f(x,y) = 4xy, \quad 0 < x < 1, \ 0 < y < 1$.

a) Calcule a função de distribuição conjunta das duas variáveis.
b) Calcule a função de densidade de probabilidade conjunta de $U = X^2$ e $V = Y^2$.
c) Calcule a f.d.p. da média aritmética entre X e Y.

40. Uma variável X tem função de probabilidade

x:	0	1	2	3	4
$f(x)$:	0.2	0.2	0.1	0.3	0.2

a) Calcule E(X) e Var(X).
b) Sendo $Y = \frac{1}{2}X - 2\frac{1}{2}$, determine E($Y$) e Var($Y$).
c) Faça $Z = 1/(X + 1)$ e calcule E(Z) e Var(Z).

41. Retome o exercício 25.
a) Calcule E(X) e Var(X).
b) Calcule E($1/X$).
c) Calcule E(Y), E(W), E(Z) e E(U).

42. Um comerciante vende, entre outros artigos, máquinas de calcular de certo tipo. Seja X a v.a. que representa o número de máquinas de calcular disponíveis para venda no início de cada semana. O comerciante possui uma dessas máquinas para seu próprio uso, que poderá eventualmente vender, mas que não conta como disponível. O número de máquinas vendidas semanalmente é uma v.a. Y. A função de probabilidade conjunta de (X, Y) é

$$f(x, y) = 1/12, \quad x = 1,2,3; \quad 0 \le y \le x + 1, y \text{ inteiro.}$$

a) Determine a percentagem de semanas em que se vendem mais máquinas do que a média das máquinas disponíveis.
b) Determine a percentagem de semanas em que o comerciante tem que vender a sua própria máquina.
c) Determine a percentagem de semanas em que uma das máquinas disponíveis fica por vender.

43. Considere o vetor aleatório (X, Y), com função de probabilidade conjunta

Y/X	-1	0	1
-1	b	0	c
0	0	a	0
1	c	0	b

a) Obtenha as relações entre a, b e c: (i) de forma que X e Y sejam não correlacionadas; (ii) de forma que X e Y sejam perfeitamente correlacionadas.
b) Obtenha a f.p. da v.a. $W = |X - Y|$.

44. Uma empresa dedica-se à venda de fechaduras. O preço de compra das fechaduras é uma v.a. Y com função de densidade dada por $f(y) = 0.5y, \quad 0 < y < 2$. O preço de venda das mesmas fechaduras é uma v.a. X, tal que $f(x \mid y) = 0.25x, \quad 1 < x < 3, \quad y$ fixo no intervalo $]0, 2[$.
a) Calcule a probabilidade da comercialização de uma fechadura ser lucrativa.
b) Estude a existência de independência entre as variáveis aleatórias e conclua sobre o valor do coeficiente de correlação.
c) Calcule a expressão analítica da curva de regressão (tipo I) de X sobre Y e comente, face aos resultados de b).

45. Considere duas variáveis aleatórias, X e Y, com f.d.p. conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < 1;\ 0 < y < x \\ 0, & \text{outros } (x, y) \end{cases}.$$

a) Estude a independência entre X e Y.
b) Calcule $P(X > 2Y)$.
c) Obtenha a regressão de tipo I de Y sobre X.

46. Num estabelecimento são vendidos os produtos A e B. A experiência anterior na venda desses produtos permite estabelecer que:
    - Nunca se vende mais do que uma unidade de cada um dos produtos;
    - Em 50% dos dias vende-se uma unidade do produto A;
    - Em 40% dos dias não se vende qualquer unidade do produto B;
    - Nos dias em que não se vende qualquer unidade de A, vendem-se em média 0.8 unidades de B.

    a) Obtenha as funções de probabilidade marginais das variáveis aleatórias que representam as vendas diárias dos dois produtos, bem como as respetivas funções de distribuição.
    b) Obtenha a f.p. conjunta das variáveis.
    c) Calcule e interprete o coeficiente de correlação.
    d) Calcule o número médio de unidades vendidas do produto A, nos dias em que é vendida 1 unidade do produto B.

47. Considere o vetor aleatório (X,Y), onde X representa o tempo de permanência de um aluno na aula e Y representa o aproveitamento que ele retira da mesma (tempo em que está atento), com a f.d.p. $f(x,y) = k, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 0.8x$.
    a) Mostre que k =2.5.
    b) Qual a probabilidade de o aluno estar atento a maior parte do tempo que está na aula?
    c) Obtenha o valor esperado de Y condicionado por X e interprete o resultado quanto ao grau de aproveitamento das aulas.

48. A procura diária de um produto, em toneladas, é uma variável aleatória X com função de densidade $f(x) = 1/4, \quad 0 < x < 4$.
    a) Sabendo que o lucro por cada tonelada vendida é de 4 unidades monetárias e o prejuízo por cada tonelada não vendida é de 2 u. m., calcule a tonelagem a comprar no início de cada dia.
    b) Resolva a questão da alínea anterior, admitindo adicionalmente que a empresa considera um custo de 1 u.m. por tonelada de procura não satisfeita (custo de penúria). Analise os resultados.

49. A procura semanal (em toneladas) de certo produto, num dado entreposto comercial, é uma variável aleatória com f.d.p. $f(x) = 0.25 - 0.01x, \quad 10 \le x \le 20$.
    No início de cada semana é expedida a partir da fábrica a quantidade necessária para abastecer o entreposto, não sendo possíveis quaisquer abastecimentos intercalares. Sabendo que cada tonelada vendida no entreposto proporciona um lucro de 500 e cada tonelada não vendida implica um custo de armazenamento semanal de 100, determine:
    a) A quantidade ótima a expedir no início de cada semana.
    b) A probabilidade de rutura do stock óptimo.

50. Retome as distribuições dos exercícios 25 e 40 e, para cada uma delas, calcule o coeficiente de variação, o coeficiente de assimetria, o coeficiente de achatamento, o erro médio absoluto, a amplitude inter-quartis, a mediana e $\xi_{0.356}$. Caracterize as distribuições, recorrendo aos valores obtidos para os referidos parâmetros.

51. Dada a f.p. conjunta $f(x,y) = \dfrac{x+y}{32}, \quad x = 1,2; \quad y = 1,2,3,4$:
    a) Calcule E[X] e Var (Y).
    b) Use valores esperados para verificar que X e Y não são independentes.
    c) Calcule o coeficiente de correlação entre as duas variáveis.

52. Uma empresa vende em média, por mês, 50 unidades de determinado produto, com desvio padrão igual a 3. Obtenha um limite mínimo para a probabilidade de as vendas mensais se situarem entre 40 e 60 unidades.

53. Uma sapataria vende, em média, 120 pares de sapatos por semana.

a) Calcule um limite superior para a probabilidade de, numa semana, se venderem pelo menos 240 pares de sapatos.

b) Sabendo que a variância do número de pares de sapatos vendidos é 100, forneça um limite inferior para a probabilidade de, numa semana, se venderem entre 40 e 200 pares.

54. Em certa região, o rendimento individual tem distribuição desconhecida. O rendimento médio, no entanto, é conhecido e igual a 20 000 u.m., registando-se ainda um desvio padrão de 2 500 u.m. Crê que será admissível haver 70% de habitantes da região com rendimento entre 12 500 e 27 500 u.m.?

55. O número de acidentados que diariamente requerem tratamento de urgência em determinado hospital é uma v.a. com média 30 e variância 4. Para efeitos de dimensionamento do serviço de urgência, quer calcular-se um limite diário para o número de acidentados que não seja excedido em, pelo menos, 95% dos dias. Calcule esse limite.

56. De uma v.a. Y sabe-se que E[Y]=100 e Var[Y]=9. Calcule um minorante para $P\left[80 \leq Y \leq 130\right]$:

a) Usando a desigualdade de Chebychev e um intervalo centrado na média, escolhido de forma conveniente.

b) Usando a desigualdade de Chebychev, aplicada ao intervalo dado. Compare com o resultado obtido em a) e comente.

c) Usando a desigualdade de Chebychev, mas sabendo que Y tem distribuição simétrica em torno da sua média.

<u>Capítulo 4</u>

57. Num certo jogo é sorteado um número entre 000 e 999, inclusive. O prémio é igual ao quíntuplo do número sorteado. Seja X a v.a. que representa o número premiado e Y a v.a. que representa o valor do prémio correspondente. Calcule:
  a) A f.p., o valor esperado e a variância de X.
  b) A f.p., o valor esperado e a variância de Y.
  c) Quanto deve pagar uma pessoa para participar no jogo, se este for um "jogo justo"?

58. Sejam a e b números inteiros, tais que $a < b$. Seja Y uma v.a. com distribuição uniforme no conjunto $\{a, a+1, ..., b\}$. Calcule a f.p., o valor esperado e a variância de Y.

59. A procura diária de um produto, em unidades, é uma variável aleatória X com distribuição uniforme no conjunto $\{0,1,2,3,4\}$.
  a) Sabendo que o lucro por cada unidade vendida é de 4 unidades monetárias e o prejuízo por cada unidade não vendida é de 2 u. m., calcule o stock a constituir no início de cada dia.
  b) Resolva a questão da alínea anterior, admitindo adicionalmente que a empresa considera um custo de 1 u.m. por unidade de procura não satisfeita (custo de penúria). Analise os resultados.

60. Da produção diária de uma máquina retiram-se, para efeito de controlo, 10 dos artigos produzidos. A experiência mostra que 80% dos artigos podem considerar-se sem defeito. Calcule a probabilidade de nos 10 artigos controlados haver mais do que 8 artigos sem defeito.

61. Um produtor de refrigerantes resolveu lançar uma campanha publicitária, oferecendo prémios impressos nas cápsulas das garrafas. Durante a campanha, 5% das garrafas distribuídas para venda tinham prémio. Ao adquirir 15 garrafas, qual a probabilidade de se receber, pelo menos, 1 prémio?

62. Depois de cada período de trabalho de 30 minutos uma dada máquina é inspeccionada, necessitando de ser afinada (em média) uma em cada vinte vezes. Calcule:
  a) A média do número de afinações, numa semana em que a máquina trabalha 20 horas.
  b) A probabilidade de, em 8 horas de trabalho: (i) se fazer pelo menos uma afinação; (ii) se fazerem no mínimo 2 afinações, mas não mais de 5.

63. A produção de certo artigo em dada unidade fabril é assegurada por duas máquinas, de funcionamentos independentes. Da experiência, pode concluir-se que a proporção de unidades com defeito é de 5%, em cada uma das máquinas.

  Atendendo à capacidade das máquinas, e para efeitos de controlo de qualidade, colhe-se diariamente uma amostra de 4 unidades da máquina 1 e outra de 8 unidades da máquina 2.
  a) Calcule a probabilidade de se encontrarem 2 unidades com defeito no conjunto das 2 amostras.
  b) O artigo é vendido em embalagens de 20, garantindo o fabricante que 90% são de boa qualidade. Calcule a probabilidade dessa garantia ser violada.

64. O número de carros vendidos semanalmente num stand tem distribuição binomial de parâmetros N e p.
  a) Se a média do número de carros vendidos semanalmente é 1.25 e a variância é 0.9375, qual a percentagem de semanas em que as vendas são inferiores a 2 unidades?
  b) Admita que o quociente entre a percentagem de semanas em que as vendas são de 1 unidade e a percentagem de semanas em que as vendas são nulas é igual a 2. Se a variância for 1.125, qual o número médio de carros vendidos semanalmente?

65. Seja X a v.a. que representa o número de pessoas, escolhidas ao acaso e com reposição, que é necessário interrogar, até se encontrar uma cujo aniversário seja a 1 de Janeiro (ignore 29 de Fevereiro e admita que todos os outros dias do ano são igualmente prováveis).
  a) Qual a distribuição de X?
  b) Calcule o valor esperado, a variância e o desvio padrão de X.
  c) Calcule $P(X > 400)$ e $P(X < 300)$.

66. Num exame, um "estudante" responde às questões escolhendo ao acaso entre as possibilidades V ou F. Admitindo que há independência entre as escolhas, determine a probabilidade de:
  a) A primeira resposta correta ser na questão 3.

b) No máximo, o estudante ter que dar três respostas até acertar pela primeira vez.

67. Num teste de escolha múltipla há 5 respostas possíveis para cada questão, mas só uma está correta. Se a escolha das respostas é feita completamente ao acaso, qual a probabilidade de a primeira resposta certa ser na questão 4?

68. A probabilidade de uma máquina produzir um artigo com defeito é de 0.01. Todos os artigos são inspeccionados, logo após a produção. Sabendo que há independência, calcule a probabilidade de terem que ser inspeccionadas pelo menos 100 unidades, até se encontrar uma defeituosa.

69. Num armazém são empacotadas maçãs em embalagens de 2 kg. No entanto, 4% dos pacotes têm menos de 2 kg. Uma organização de defesa do consumidor vai ao armazém e pesa embalagens, escolhidas ao acaso, e num máximo de 20, até encontrar uma com peso a menos - para fazer a correspondente denúncia.
Qual a probabilidade de: (i) não chegar a haver denúncia? (ii) não ser necessário chegar a pesar as 20 embalagens? (iii) ser necessário pesar exatamente as 20 embalagens?

70. Admita-se que 3% dos espelhos retrovisores produzidos por determinada fábrica são defeituosos e que as qualidades dos espelhos produzidos são mutuamente independentes. Num controlo são retirados espelhos ao acaso da linha de montagem. Qual a probabilidade de o primeiro espelho encontrado com defeito ser o oitavo observado?

71. Certo fabricante de automóveis aplica 3 000 diferentes fechaduras nos seus veículos. Admita ter encontrado uma dessas chaves.
   a) Em média, quantos carros será necessário experimentar, até se encontrar um em que a chave sirva?
   b) Qual a probabilidade de se ter que experimentar, no mínimo, 3 000 veículos, até que a chave sirva?
   c) Qual a probabilidade de se ter que experimentar, no máximo, 2 000 veículos?

72. Uma moeda equilibrada é lançada ao ar, numa sequência de lançamentos independentes. Calcule a probabilidade de que a primeira "coroa" seja observada no quinto lançamento, sabendo-se que nos três primeiros se observou "cara".

73. Seja X uma v.a. com distribuição geométrica. Prove a " falta de memória" da distribuição, isto é, prove que $P(X > k + j | X > k) = P(X > j)$, k e j inteiros não negativos.

74. Considere uma sucessão de provas de Bernoulli de parâmetro 0.6. Seja X uma v.a. que representa o número de provas que é necessário realizar até se observarem 4 sucessos. Prove que $P(X = 5) = P(X = 6)$.

75. Seja agora X uma v.a. que representa o número de provas que é necessário realizar até se observarem 15 sucessos. Para que valor do parâmetro se tem $P(X = 20) = P(X = 21)$?

76. Seja X uma v.a. com distribuição binomial negativa de parâmetros k e p.
   a) Considere a função $h(q) = (1 - q)^{-k}$, $0 < q < 1$. Use o desenvolvimento em série de McLaurin para provar que $h'(q) = k(1-q)^{-k-1} = \sum_{r=1}^{\infty} \binom{k+r-1}{k-1} r q^{r-1}$.
   b) Usando o desenvolvimento em série de McLaurin da função $h'(q)$, mostre que $E[X - k] = p^k qk(1 - q)^{-k-1}$ e deduza que $E[X] = k/p$.
   c) Mostre que $h''(q) = k(k+1)(1-q)^{-k-2} = \sum_{r=2}^{\infty} \binom{k+r-1}{k-1} r(r-1) q^{r-2}$.
   d) Mostre que $E[(X - k)(X - k - 1)] = (q^2/p^2)k(k+1)$.

e) Mostre que $Var(X-k)=kq/p^2$ e deduza $Var(X)$.

77. Num lote de 50 objetos há 3 defeituosos. Recolhe-se um subconjunto de 10, escolhidos ao acaso e sem reposição, dos 50.
    a) Qual a probabilidade de haver 1 objeto defeituoso na amostra?
    b) Qual a probabilidade de haver, no máximo, 1 objeto defeituoso na amostra?
    c) Qual a probabilidade de haver, pelo menos, 1 objeto defeituoso na amostra?
    d) Calcule a média e o desvio padrão do número de objetos defeituosos na amostra.

78. O jogo do Totoloto consiste na extração de 6 bolas, sem reposição, de uma urna com bolas numeradas de 1 a 49. Também é extraída uma sétima bola (número suplementar), para efeitos do segundo prémio. Cada aposta corresponde a uma escolha de 6 números.
    a) Qual a probabilidade de sair o quinto prémio, ou seja, de se acertar em 3 números dos 6 sorteados?
    b) O segundo prémio é ganho quando se acerta em 5 dos 6 números sorteados e no número suplementar. Qual a probabilidade desse acontecimento se realizar?

79. Num saco há 24 pedaços de doce, dos quais 12 são de noz e 12 são de avelã. Um indivíduo come sucessivamente 5 doces do saco, escolhidos ao acaso.
    a) Qual a probabilidade de o indivíduo em questão ter comido 2 doces de noz?
    b) Qual a probabilidade de ter comido, no máximo, 2 doces de avelã?
    c) Calcule a f.p., o valor esperado e a variância do número de doces de noz comidos pelo indivíduo.

80. Numa caixa há 3 bolas brancas e 4 bolas pretas. São extraídas 5 bolas, ao acaso e sem reposição. Seja X a v.a. que representa o número de bolas brancas extraídas. Calcule a f.p., o valor esperado e a variância de X.

81. Os alunos do ISEG foram inquiridos sobre os meios de transporte que utilizam nas suas deslocações. Apurou-se que 10% só andam a pé, 40% andam a pé e de metropolitano, 20% andam de metro e de autocarro, 20% só usam o automóvel e 10% estão noutras situações.
    a) Defina as variáveis aleatórias convenientes e escreva a respetiva função de probabilidade conjunta, num conjunto de 50 alunos, escolhidos ao acaso (de forma independente) de entre os alunos do ISEG.
    b) Nesse conjunto de 50 alunos, qual o valor esperado do número de alunos em cada uma das 5 situações consideradas? E a matriz das variâncias e covariâncias?
    c) Calcule a probabilidade de, no conjunto dos 50 alunos, estes se dividirem igualmente por cada uma das situações.

82. O número de pessoas que acorrem a um certo serviço de atendimento ao público é uma v.a. de Poisson com valor médio 15. O serviço funciona das 10 às 16 horas e atende, no máximo, 25 pessoas por dia.
    a) Qual a probabilidade de, entre as 10 e as 12 horas, chegarem menos de 5 pessoas?
    b) Qual a probabilidade de, num dia, a primeira pessoa chegar depois das 12 horas?
    c) Qual a proporção de dias em que ficam pessoas por atender?

83. Um livro de 600 páginas contém 300 gralhas. Calcule a probabilidade de uma página conter, pelo menos, 3 erros.

84. O número de ovos postos por minuto em certo aviário tem distribuição de Poisson com média igual a 1.
    a) Determine a probabilidade do número de ovos postos por minuto ser superior ao dobro da variância.
    b) Qual a probabilidade de em 5 minutos serem postos menos de 3 ovos?
    c) Se num período de 10 minutos forem postos 12 ovos, qual a probabilidade de serem postos 10 ou mais ovos nos primeiros 8 minutos?

85. Estatísticas médicas revelam que determinada doença, cujo tratamento é extremamente dispendioso, afeta 1 em cada 5 000 pessoas. Uma seguradora, depois de estudar o assunto, decidiu criar um seguro para cobertura das despesas de tratamento. Num determinado ano, a companhia de seguros tem em carteira 3 000 apólices desse tipo.
    a) Determine a probabilidade de nenhuma das pessoas seguradas contrair a doença, nesse ano.

b) Desde 1 de Janeiro já foi efetuada uma participação à seguradora. Qual a probabilidade de não se verificarem mais de 3 participações até ao final do ano?

86. De 20 em 20 minutos, parte um comboio (sem atrasos) de uma certa estação. Qual a probabilida- de de um utilizador, que desconhece o horário e acaba de chegar à estação, esperar no máximo 5 minutos até à saída do comboio?

87. Seja X uma v.a. com f.d.p. $f(x) = x/2, \quad 0 < x < 2$. Verifique que $Y = F(X) \sim U(0,1)$.

88. Seja X uma v.a. com distribuição Normal de média 6 e variância 25. Calcule:

a) $P(6 \le X \le 12)$;

b) $P(0 \le X \le 8)$;

c) $P(-2 < X \le 0)$;

d) $P(X > 21)$;

e) $P(|X - 6| < 12.88)$;

f) a: $P(X - 6 > 5a) = 0.9$.

89. O montante de depósitos à ordem efetuados diariamente em certa agência bancária é uma v.a. com distribuição normal de valor médio 120 u.m. e variância 64.

a) Determine a percentagem de dias em que o montante de depósitos à ordem se situa entre 105 e 135 u.m.

b) Determine a probabilidade de o montante de depósitos ser superior à média, nos dias em que é inferior a 125 u.m.

c) Determine a média e a variância do montante de depósitos à ordem efetuados semanalmente (5 dias).

d) Determine um limite inferior (um limite superior) para o montante depositado à ordem, em 90% dos dias.

90. O tempo médio gasto na estafeta 4×100 metros por cada um dos 4 atletas da equipa A é, respetivamente, 10.6, 10.8, 10.5 e 10.7 segundos. Admite-se que os tempos despendidos têm distribuições normais, cujos respetivos desvios padrão são 0.2, 0.5, 0.4 e 0.6 segundos.

a) Estabeleça um limite máximo para o tempo gasto pela equipa, em pelo menos 90% dos casos.

b) Se o tempo gasto pela equipa B tiver distribuição normal de média 42.8 segundos e variância 0.8, qual a probabilidade desta equipa vencer a equipa A?

91. Num estabelecimento que vende materiais de construção, sabe-se que as vendas diárias de areia (em centenas de kg) têm um comportamento aleatório traduzido por uma distribuição normal, com média 20 e desvio padrão 2.

a) Sabendo que numa manhã o estabelecimento já vendeu uma tonelada de areia, qual a probabilidade de, nesse dia, vir a vender mais de 2,5 toneladas?

b) Qual a probabilidade de, em determinado mês (20 dias), as vendas de areia ultrapassarem 37 toneladas?

92. Para efeitos de comercialização, determinados frutos são classificados pelo tamanho. Como medida, toma-se o respetivo diâmetro máximo, que é uma v.a. com distribuição normal de desvio padrão igual a 5 e valor médio m. As categorias são as seguintes:

C1- frutos com diâmetro máximo inferior ou igual a 6;

C2- frutos com diâmetro máximo entre 6 e 12;

C3- frutos com diâmetro máximo superior ou igual a 12.

a) Sabendo que 30% dos frutos são da categoria C3, calcule o diâmetro máximo médio dos frutos e a percentagem de frutos em cada uma das outras categorias.

b) Se os frutos forem vendidos em embalagens de 6 unidades, incluindo aleatoriamente todos os tamanhos, qual a probabilidade de haver pelo menos dois frutos da categoria C3, numa embalagem escolhida ao acaso?

93. Um eixo produzido por uma máquina considera-se não defeituoso se o desvio do seu diâmetro, relativamente à dimensão projetada, não excede 2 mm. O desvio é uma grandeza aleatória com

distribuição normal de média nula e desvio padrão 1,6 mm. Qual a percentagem de eixos não defeituosos produzidos pela máquina?

94. Seja (X,Y) um vetor aleatório com distribuição normal bidimensional a verificar $\mu_x = 70$, $\sigma_x^2 = 100$, $\mu_Y = 80$, $\sigma_Y^2 = 169$ e $\rho_{X,Y} = 5/13$.
Calcule $E[Y|X = 72]$, $Var[Y|X = 72]$ e $P[Y < 84|X = 72]$.

95. Seja (X,Y) um vetor aleatório com distribuição normal bidimensional, tal que $\mu_x = 185$, $\sigma_x^2 = 100$, $\mu_Y = 84$, $\sigma_Y^2 = 64$ e $\rho_{X,Y} = 0.6$, e onde *X* representa a altura (cm) de um indivíduo escolhido ao acaso em certa população e *Y* representa o seu peso (kg).
   a) Determine a distribuição do peso dos indivíduos que medem 1.9 m.
   b) Qual a probabilidade de um indivíduo que mede 1.9 m pesar entre 86,4 kg e 95,36 kg?

96. Numa unidade industrial, o tempo de execução de uma peça é uma v.a. com distribuição exponencial de valor médio igual a 5 minutos.
   a) Em dado momento, verifica-se que determinada peça já está em execução há 2 minutos. Calcule a probabilidade de serem ainda necessários pelo menos 4 minutos até à sua conclusão.
   b) Tomadas 5 peças ao acaso, calcule a probabilidade de duas delas terem tido um tempo de execução máximo de 4 minutos.
   c) Admitindo que não há peças em stock, acha razoável que, em dado momento, a empresa se tenha comprometido a fornecer 50 peças dentro de 4 horas?

97. Os clientes chegam a uma loja segundo um processo aproximado de Poisson, à taxa média de 10 por hora. Qual a probabilidade da empregada ter que esperar mais de 10 minutos, e menos de 20, até que chegue o primeiro cliente do dia?

98. O tempo que um ceramista leva a fazer uma peça (em horas) é uma v.a. *X* com distribuição G(3,2).
   a) Sabendo-se que trabalha 8 horas por dia, calcule a probabilidade de o ceramista fazer 5 peças num dia.
   b) O ceramista comprometeu-se a satisfazer uma encomenda de 100 peças em 22 dias (176 horas). Qual a probabilidade de cumprir o prazo?

99. A variável aleatória *X* tem distribuição do χ^2 com 15 graus de liberdade. Determine dois valores, *a* e *b*, tais que $P(a < X < b) = 0.95$. Os valores *a* e *b* são únicos? Se não, determine outro par.

100. Sabendo que $X \sim \chi^2_{(9)}$, calcule *a*: $P(X < a) = 0.995$.

101. Certa v.a. *X* tem distribuição do χ^2 e sabe-se que $P(X < 22) \cong 0.995$. Quantos graus de liberdade tem a distribuição em causa?

102. Um fornecedor de equipamentos de precisão comprometeu-se a fornecer 5 barras de comprimento igual a 210 mm, sujeitando-se a uma multa *M* por desvios em relação às especificações. Essa multa é calculada segundo a fórmula $M = 500(X - 210)^2$ (em 10^3), onde *X* é o comprimento real de cada peça, em mm. O processo de fabrico utilizado garante peças cujo comprimento tem distribuição normal de média 210 e desvio padrão 0.15.
   a) Qual a probabilidade de o fornecedor se sujeitar, em relação às 5 peças, a uma multa superior a 125 000?
   b) Qual o valor esperado e qual a variância da multa total?

103. A v.a. *T* tem distribuição de Student com 10 graus de liberdade. Determine:
   a) *x*, tal que P(*T*£ *x*) = 0.05.
   b) P(*T* £ 0.26).
   c) *y*, tal que P(*T* ³ *y*) = 0.9.

d) z, tal que P(- $z < T < z$) = 0.95.

104. Seja X uma v.a. tal que $X \sim t_{(12)}$. Determine:

a) a: $P(X < a) = 0.05$.

b) $P(X \leq 2.5)$.

c) $P(X \geq b) = 0.95$.

d) $P(-c \leq X \leq c) = 0.9$.

e) Dois pares de valores, a e b, tais que $P(a < X < b) = 0.95$.

105. Seja X uma v.a, tal que $X \sim t_{(n)}$:

a) Determine n, sabendo que $P(X > -2.528) = 0.99$.

b) Calcule $P(0 < X \leq 2.845)$.

106. Sabe-se que $X \sim F_{(3,5)}$. Calcule:

a) a: $P(X > a) = 0.95$.

b) $P(5.41 < X < 12.06)$.

c) b: $P(X \geq b) = 0.99$.

107. Sabe-se que $Y \sim t_{(12)}$. Calcule:

a) r: $P(Y^2 > r) = 0.05$.

b) s: $P(Y^2 > s) = 0.99$.

108. Considere uma v.a. Y com distribuição F de Snedcor, de parâmetros m e n.

a) Se m = 8 e n = 20, calcule k de forma que $P(Y > k) = 0.95$.

b) Se m = 5 e n = 3, calcule l de forma que $P(Y \leq l) = 0.05$.

109. Sejam $X \sim N(0, 2^2)$, $Y^2 \sim \chi^2_{(10)}$ e $Z^2 \sim \chi^2_{(5)}$, mutuamente independentes. Calcule:

a) $P(Y^2 + Z^2 > 25)$;

b) $P(X/Y \leq 1.5)$;

c) $P(Y^2 > 0.6Z^2)$.

110. Dadas duas variáveis aleatórias, X e Y^2, independentes e tais que $X \sim N(2,1)$ e $Y^2 \sim \chi^2_{(4)}$, calcule $P(X - Y < 2)$.

Capítulo 5

111. Um dado foi enviesado, de modo que a probabilidade de sair a pontuação 6 começasse por ser superior a 1/6 (a "sorte de principiante"), mas fosse diminuindo com o número de lançamentos.

Se $p_N = 2n^2\left(e^{1/n} - 1 - 1/n\right) - 1$ é a probabilidade de se obter esse resultado no N-ésimo lançamento, mostre que $X_N \xrightarrow{p} 0$, sendo $\{X_N\}$ a sucessão de v.a. de Bernoulli, tais que X_N assume o valor 1 quando se obtém 6 no N-ésimo lançamento, $N = 1,2,...$

112. Seja $\{X_N\}$ a sucessão de v.a. de Bernoulli, tais que X_N assume o valor 1 quando o primeiro sucesso na realização de uma sucessão de provas de Bernoulli de parâmetro p se observa no N-ésimo lançamento, $N = 1,2,...$

Verifique que $X_N \xrightarrow{mq} 0$ e identifique a v.a. X, tal que $X_N \xrightarrow{D} X$.

113. Seja $\{X_N\}$ uma sucessão de v.a., tal que a correspondente sucessão das funções de distribuição

$$F_N(x) = P\left(X_N \le x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{N+1}{5N+2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{N+2}{2N+3} & 1 \le x < 2' \\ 1, & x \ge 2 \end{cases} \qquad N = 1,2,...$$

tem termo geral

Mostre que $X_N \xrightarrow{D} X$, onde

x:	0	1	2
$f(x)$:	0.2	0.3	0.5

114. Admita-se que uma experiência aleatória pode ser repetida tantas vezes quantas se quiser, de forma independente. A probabilidade de um acontecimento A se realizar em cada uma das repetições é P(A).
   a) Quantas vezes se deve repetir a experiência, se se pretende que a frequência relativa de realizações de A não se afaste da verdadeira probabilidade mais do que 0.05, com probabilidade 0.95?
   b) E se for com probabilidade 0.90?

115. Certas sementes germinam de forma independente. Se as condições de luz, humidade e adubagem forem semelhantes, a probabilidade de germinarem é p. Quantas sementes devem ser lançadas à terra, se se pretende uma aproximação de p, a menos de 0.1 e com probabilidade 0.9?

116. Se $X_1, X_2, ..., X_n$ são não correlacionadas, todas com média μ e variância σ^2, então $\overline{X}_n = (1/n)\sum X_i$ tem média μ e variância σ^2/n.

Quando $\sigma^2 = 1$, qual deve ser a dimensão n, de modo que $P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < 1\right) > 0.9$?

117. Um distribuidor de whisky acredita que 5% das garrafas existentes no mercado são falsificadas. Regularmente são verificadas 1000 garrafas nos postos de venda.

Em certa fiscalização detetaram-se 91 garrafas falsificadas. Com um grau de certeza de 0.975, pode continuar a acreditar-se que 0.05 é a verdadeira proporção de garrafas falsificadas?

118. Numa fábrica produz-se um artigo à razão de 100 unidades por dia. Cada unidade do artigo incorpora X gramas de certa matéria-prima, sendo X uma v.a. com média 75 e variância 225.

a) Determine a percentagem de dias em que o consumo de matéria-prima não excede 7,6 kg.
b) Os artigos são vendidos em lotes de 200. O custo da matéria-prima é de 5 por grama. Qual deve ser o preço base de cada lote, de forma a cobrir o custo da matéria-prima incorporada em 95% dos casos?

119. A procura diária de um dado produto tem uma distribuição de Poisson, de média 10. Pretendendo fazer-se a planificação dos stocks, calcule a quantidade anual (250 dias úteis) que deve ser comprada, de forma a cobrir a procura com uma probabilidade de 97.5%.

120. Numa praça de Lisboa estão habitualmente estacionados automóveis em transgressão. Todos os dias a polícia autua 90% dos carros nessa situação, deixando notificação no pára-brisas. O número de pessoas que se apresentam diariamente na esquadra para pagar a multa é uma v.a. de média e variância iguais a 10. Se cada multa for de 25 e a esquadra estiver aberta 225 dias por ano, qual a probabilidade de a receita anual com as referidas multas ultrapassar 60 000?

121. Admita que o tempo (minutos) gasto por um operário no processamento de uma embalagem é uma v.a. com distribuição exponencial de média igual a 2 minutos. Cada operário trabalha 5 dias por semana e 8 horas por dia.
a) Considerando uma procura semanal de 15 000 embalagens, determine quantos operários deve ter a secção de embalagem, para que haja problemas com a satisfação da procura em não mais de 5% das semanas.
b) Admitindo que na secção de embalagem trabalham 14 operários, determine o número de embalagens que é possível processar semanalmente, com uma probabilidade de 0.99.

122. Os elos de uma corrente de bicicleta têm comprimentos aleatórios de média 0.5 cm e desvio padrão 0.04 cm. As normas de um fabricante de bicicletas exigem que o comprimento das correntes esteja compreendido entre 49 cm e 50 cm.
a) Se uma corrente tiver 100 elos, determine a percentagem de correntes que satisfazem as normas do fabricante.
b) Se se utilizassem apenas 99 elos, qual deveria ser o valor do desvio padrão, para que 90% das correntes satisfizessem os requisitos fixados?

123. Para a produção de certo tipo de peças, uma fábrica está equipada com 6 máquinas, de características idênticas e de funcionamentos mutuamente independentes. O custo de manutenção semanal de cada máquina é uma v.a. uniformemente distribuída no intervalo (0,50). Na elaboração do orçamento anual (52 semanas) foi considerada uma verba de 8 000 para a manutenção das 6 máquinas. Justificando, diga se acha suficiente a dotação orçamental que foi feita.

124. Seja X uma v.a. com distribuição binomial de parâmetros 36 e 0.5.
a) Calcule $P\left[12 < X \leq 15\right]$: (i) usando a aproximação à distribuição Normal; (ii) usando a aproximação à distribuição Normal e efetuando a correção de continuidade; (iii) usando $f(x)$ e a calculadora (valor exato).
b) Calcule $P\left[X = 20\right]$ nos mesmos termos da alínea anterior.

125. Seja X uma v.a. com distribuição de Poisson de parâmetro 20.
Calcule $P\left[16 < X \leq 21\right]$, $P\left[16 \leq X < 21\right]$; $P\left[16 < X < 21\right]$; $P\left[16 \leq X \leq 21\right]$: (i) usando a aproximação à distribuição Normal; (ii) usando a aproximação à distribuição Normal e efetuando a correção de continuidade; (iii) usando a tabela.