EXERCÍCIOS ADICIONAIS CAPÍTULO 2

1. Seja o espaço $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Neste espaço, a probabilidade de cada acontecimento $A \subset \Omega$ é proporcional à área da figura plana correspondente à imagem de *A*. Seja $U\,[\,(x, y)\,]$ a variável aleatória definida pela distância do ponto (*x,y*) à origem, (0,0).
   a) Determine a função de distribuição da variável aleatória *U* no espaço Ω.
   b) Calcule $P(0.2 < U < 0.5)$ e $P(U > 0.5 \mid U > 0.2)$.
   c) Classifique a variável aleatória *U*.

2. Seja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ x/3 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (x \geq 2). \end{cases}$$

   a) Verifique que se trata de uma função de distribuição.
   b) Classifique a variável aleatória em causa.

3. Um saco tem *n* bolas brancas (*B*) ($n > 10$) e apenas uma de cor preta (*P*). São extraídas bolas sem reposição até sair a de cor preta. Seja *X* a variável aleatória que representa o número de extracções feitas.
   a) Qual a imagem do acontecimento $A = \{P, BP, BBP, BBBP\}$?
   b) Qual a imagem inversa do intervalo (0, 5)?
   c) Classifique a variável aleatória e obtenha a sua função de distribuição.
   d) Qual a probabilidade de ser necessário extrair mais de três bolas?

4. Calcule o valor de *k* de modo que as funções dadas nas alíneas seguintes definam funções probabilidade da variável aleatória *X*.
   a) $f(x) = kx \quad (x = 1, 2, \boxed{?}, 10)$;
   b) $f(x) = k\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \quad (x = 1,2,3, \boxed{?})$.

5. Seja *X* uma variável aleatória com função densidade

$$f(x) = x^{-3}/2 \quad (x > 1/2).$$

   a) Obtenha a função de distribuição de *X*.
   b) Calcule $P(X > 4 \mid X > 2)$.

6. A quantidade de vinho (em dezenas de litros) que um produtor-engarrafador vende por dia é uma variável aleatória *X* com função de distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \dfrac{x^2}{50} & (0 \le x < 5) \\ \dfrac{20x - x^2}{50} - 1 & (5 \le x < 10) \\ 1 & (x \ge 10). \end{cases}$$

a) Determine a função densidade.
b) Do conjunto dos dias em que vende mais que 50 litros, qual a probabilidade de vender menos que 90 litros?
c) Se o ganho líquido diário for $Y = 2X - 6$, calcule a função de distribuição do ganho líquido e a proporção de dias em que há prejuízo.

7. O tempo de reparação, em dezenas de horas, de certo tipo de avarias em computadores é uma variável a aleatória com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x > 0) \\ 0 & (\text{outros } x). \end{cases}$$

a) Determine a função de distribuição da variável aleatória *X*.
b) Que limite superior, para o tempo de reparação, pode ser estabelecido em 40% dos casos?
c) Está instituído na empresa um sistema de prémios que atribui €20 aos trabalhadores que façam uma reparação em menos de 5 horas, e de €10 se demorar entre 5 e 8 horas. Obtenha a distribuição da variável aleatória que representa o prémio atribuído.

8. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.
a) Se *f* é a função probabilidade de uma variável aleatória discreta, então, qualquer que seja $x \in \Re$, $0 \le f(x) \le 1$.
b) Se *f* é a função densidade de uma variável aleatória contínua, então, qualquer que seja $x \in \Re$, $0 \le f(x) \le 1$.
c) Se *F* é a função de distribuição de uma variável aleatória contínua, então, qualquer que seja $x \in \Re$, $0 \le F(x) \le 1$.
d) Se X é uma variável aleatória contínua, então a sua função densidade é sempre menor ou igual a um.
e) Se X é uma variável aleatória contínua e simétrica em relação à origem, com função de distribuição *F*, então $F(x) = 1 - F(-x)$.

9. Seja *F* a função de distribuição de uma variável aleatória X. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.
a) Sendo a e b reais tais que $a < b$ e $F(b) > 0$, então $P(X \le a \mid X \le b) = 1$.

b) Seja X uma variável aleatória contínua e simétrica em relação à origem e k uma constante real positiva. Então, $P(-k < X < k) = 2F(k) - 1$.

c) X é uma variável aleatória mista. Seja $a \in \Re$ um ponto de continuidade de $F(x)$. Então $F(a) = 1 - P(X \geq a)$.

d) Quaisquer que sejam $x, h > 0 \in \Re, F(x) < F(x + h)$.

e) Considere a variável aleatória X discreta. Sendo $Y = 1 - X$, então a função distribuição de Y é dada por $G(y) = 1 - F(y)$.

10. O tempo de fabricação de uma dada peça, em horas, é uma variável aleatória X com a seguinte função densidade

$$f(x) = \begin{cases} x\text{-}1 & 1<x<2 \\ 3\text{-}x & 2<x<3 \end{cases}$$

a) Calcule a função de distribuição de X.

b) Sabendo que uma certa peça já está a ser fabricada há duas horas calcule a probabilidade de ainda ter de esperar pelo menos mais meia hora até à sua conclusão.

c) Se o custo de cada peça (C) for calculado através da expressão: C=20+25 X, determine a distribuição dessa variável.

11. Numa dada loja de componentes para computadores, as vendas diárias de discos rígidos das marcas X e Y têm a seguinte função probabilidade conjunta:

$y \backslash x$	**0**	**1**	**2**
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

a) Determine as funções de distribuição marginais de X e de Y.

b) Qual a probabilidade de, num dia, a marca X ser a mais vendida?

c) Qual a proporção de dias em que se vende igual número de discos das marcas referidas?

d) Obtenha a função probabilidade de X, nos dias em que se vende exactamente um disco da marca Y.

e) Verifique se as variáveis são independentes.

12. Seja (X, Y) uma variável aleatória que representa o número de leitores de MP3 das marcas A e B, respectivamente, vendidos diariamente numa loja, com função probabilidade conjunta dada por

$y \backslash x$	**0**	**1**	**2**
0	a	0.06	0.04

1	0.09	b	0.01
2	0.05	0.02	0.01

a) Calcule $f_{Y|X=2}(y)$ e comente o seu significado.
b) Sabendo que em 80% dos dias não se vendem leitores da marca *A*, determine o valor das constantes a e b, bem como a probabilidade de, nessa loja, se venderem mais de 2 leitores de MP3 de marca *A* num dia.
c) Determine a função de distribuição do total de leitores de MP3 vendidos diariamente nessa loja.

13. A função probabilidade conjunta de (X,Y) é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x+y}{32} \quad (x = 1,2;\, y = 1,2,3,4).$$

a) Obtenha as funções probabilidade marginais de X e de Y.
b) Mostre que as variáveis não são independentes.
c) Calcule $P(X > Y)$.
d) Calcule $P(X = 2Y)$.
e) Obtenha as funções probabilidade condicionadas.

14. O número de jogadores suplentes disponíveis que uma dada equipa amadora de futebol pode utilizar em cada jogo é uma variável aleatória X, enquanto o número dos utilizados é uma outra variável aleatória Y. A função de probabilidade conjunta é dada por,

$f(x,y) = \dfrac{1}{15}$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4$ e y inteiro $0 \le y \le x$.

a) Qual a probabilidade de num jogo serem utilizados todos os suplentes, sabendo que havia pelo menos um disponível?
b) Em média, quantos jogadores suplentes são utilizados por desafio?

15. Seja (X,Y) uma variável aleatória discreta que representa, para cada uma das famílias residentes numa determinada zona, o número de filhos da família (X) e o número de assoalhadas do seu alojamento (Y).
Conhece-se a função de probabilidade marginal de Y

y	2	3	4	5
$f_Y(y)$	0.11	0.33	0.38	0.18

e a função de probabilidade conjunta de (X,Y) dada por,

x / y	0	1	2	3	4
2	a	0.05	0.02	0.00	0.00
3	0.05	0.09	0.14	0.04	c

4	0.02	0.09	b	0.06	a
5	c	0.05	0.05	0.05	d

a) Calcule a função de distribuição marginal de Y.

b) Determine, justificando, o valor das constantes a, b, c e d e estude a independência das variáveis X e Y.

c) Qual a percentagem de famílias dessa região com mais de dois filhos?

d) Calcule $f_{X|Y=4}(x)$ e diga qual o seu significado quando $x=2$.

16. Considere que o vector aleatório (X,Y) tem função densidade

$$f_{X,Y}(x,y)=2 \quad (0<x<1; 0<y<1/2).$$

a) Verifique que é uma função densidade.

b) Obtenha as funções densidade marginais de X e de Y, e analise a independência.

c) Calcule $P(X>1/2, Y<1/4)$.

d) Calcule $P(Y>X)$.

17. Seja

$$f_{X,Y}(x,y)=x+y \quad (0<x<1; 0<y<1).$$

a) Calcule $P(X>1/2,\ Y>1/2)$.

b) Determine as funções densidade marginais, e analise a independência das variáveis.

c) Obtenha as funções densidade condicionadas.

18. Uma empresa possui duas fábricas, *A* e *B*, que produzem o mesmo artigo. Considere-se a variável aleatória bidimensional contínua, (X,Y), que representa a produção semanal (em toneladas) das fábricas *A* e *B*, respectivamente. Sabe-se que:

$$f_Y(y)=\frac{2(5y-y^2)}{33} \quad (1<y<4);$$

$$f_{X|Y=y}(x)=\frac{1}{5-y} \quad (1<x<6-y; 1<y<4; y \text{ fixo})$$

a) Determine a função de distribuição marginal de Y.

b) Numa semana em que a fábrica *B* produziu 2 toneladas qual é a probabilidade da fábrica *A* produzir mais de 3 toneladas?

c) Determine, justificando, a função densidade de (X,Y).

d) Qual a percentagem de semanas em que a produção da fábrica *A* é superior à da fábrica *B*?

19. Uma pessoa pretende viajar diariamente num comboio que parte entre as 7:20 e as 7:30. A variável aleatória que representa o período de tempo (em minutos) que decorre entre as 7:20 e o momento da partida, X, tem função densidade

$$f_X(x) = \frac{10-x}{50} \quad (0 < x < 10).$$

A hora de chegada da pessoa à estação é também aleatória, entre as 7:20 e as 7:30. A variável aleatória que representa o período de tempo (em minutos) que decorre entre as 7:20 e o momento da chegada da pessoa à estação, Y, tem distribuição dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{10} \quad (0 < y < 10).$$

Admita a independência entre as duas variáveis aleatórias.

a) Determine a função de densidade conjunta da variável (X,Y).

b) Calcule a percentagem de dias em que a pessoa viaja nesse comboio.

c) Qual a probabilidade de a pessoa ter que esperar mais de 2 minutos até à partida desse comboio?

20. O João e a Joana combinaram encontrar-se, entre as 15 e as 16 horas, para estudar. Seja X o momento da chegada do João, e Y, o momento da chegada da Joana. Estas variáveis aleatórias são independentes, com funções densidade,

$$f_X(x) = 1 \quad (15 < x < 16); \quad f_Y(y) = 1 \quad (15 < y < 16).$$

a) Obtenha a função densidade conjunta.

b) Qual a probabilidade de ambos chegarem entre as 15:30 e as 16:00?

c) Qual a probabilidade de o João chegar antes da Joana?

d) Se o primeiro a chegar esperar apenas 15 minutos pelo outro, qual a probabilidade de estudarem juntos nesse dia?

21. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente:

f) Conhecendo as distribuições marginais de X e de Y pode sempre calcular-se a distribuição conjunta de (X,Y).

g) Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional com função de distribuição $F_{X,Y}(x,y)$. Se $F_{X,Y}(0,0)=0$ pode-se garantir que $P(X>0)=1$.

h) Se X e Y são variáveis aleatórias contínuas, tem-se $P(X<2Y)+P(X>2Y)=1$.

i) Considere a variável bidimensional (X,Y) e a respectiva distribuição conjunta. Se para um dado ponto (a,b) se tem $f_{X,Y}(a,b) = f_X(a) \times f_Y(b)$ então as variáveis aleatórias X e Y são independentes.

j) Sendo (X,Y) uma variável bidimensional discreta com função probabilidade conjunta $f(x,y)$ pode afirmar-se que, para todo o par (x,y), $f(x,y) \leq P(X=x)$.

SOLUÇÕES

1. a) $F(u)=0\ \ (u<0)$, $F(u)=u^2\ \ (0\le u<1)$, $F(u)=1\ \ (u\ge 1)$; b) 0.21, 0.78125;
   c) contínua.
2. b) mista.
3. a) $X(A)=\{1,2,3,4\}$; b) $X^{-1}[0,5]=A=\{P,BP,BBBP,BBBP\}$;
   c) discreta; $F(x)=0\ \ (x<1)$, $F(x)=1/(n+1)\ \ (1\le x<2)$,
   $F(x)=2/(n+1)\ \ (2\le x<3)$,..., $F(x)=n/(n+1)\ \ (n\le x<n+1)$,
   $F(x)=1$ $(x\ge n+1)$.
   d) $(n-2)/(n+1)$.
4. a) 1/55; b) 4.
5. a) $F(x)=0\ \ (x<1/2)$, $F(x)=1-1/(4x^2)\ \ (x\ge 1/2)$; b) 0.25.
6. a) $f_X(x)=x/25\ \ (0<x<5)$, $f_X(x)=(10-x)/25\ \ (5<x<10)$; b) 0.96;
   c) $F_Y(y)=0\ \ (y<-6)$, $F_Y(y)=(y+6)^2/200\ \ (-6\le y<4)$,
   $F_Y(y)=(28y+4-y^2)/200\ \ (4\le y<14)$, $F_Y(y)=1\ \ (y\ge 14)$; 0.18.
7. a) $F_X(x)=0\ \ (x<0)$, $F_X(x)=1-e^{-x}\ \ (x\ge 0)$; b) 0.5108;
   c) $f_Y(0)=0.4493$, $f_Y(10)=0.1572$, $f_Y(20)=0.3935$.
8. a) V; b) F; c) V; d) F; e) V; f) F.
9. a) F; b) V; c) V; d) F; e) F.
10. $F(x)=0\ \ (x<1)$, $F(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2}\ \ (1\le x<2)$, $F(x)=\dfrac{6x-x^2-7}{2}\ \ (2\le x<3)$,
    $F(x)=1\ \ (x\ge 3)$; b) 0.25 ; c) 70.
11. a) $F_X(x)=0$ $(x<0)$, $F_X(x)=0.20$ $(0\le x<1)$, $F_X(x)=0.85$ $(1\le x<2)$,
    $F_X(x)=1$ $(x\ge 2)$; $F_Y(y)=0$ $(y<0)$, $F_Y(y)=0.50$ $(0\le y<1)$;
    $F_Y(y)=0.86$ $(1\le y<2)$, $F_Y(y)=1$ $(y\ge 2)$; b) 0.39; c) 0.43;
    d) $f_{X|Y=1}(0)=5/36$, $f_{X|Y=1}(1)=30/36$, $f_{X|Y=1}(2)=1/36$;
    e) não são independentes;
12. a) $f_{Y|X=2}(0)=4/6$, $f_{Y|X=2}(1)=f_{Y|X=2}(2)=1/6$; b) 0.66, 0.06, 0;
    c) $F_T(t)=0\ \ (t<0)$, $F_T(t)=0.66\ \ (0\le t<1)$, $F_T(t)=0.81\ \ (1\le t<2)$,
    $F_T(t)=0.96\ \ (2\le t<3)$, $F_T(t)=0.99\ \ (3\le t<4)$, $F_T(t)=1\ \ (t\ge 4)$.
13. a) $f_X(x)=(2x+5)/16$ $(x=1,2)$; $f_Y(y)=(2y+3)/32$ $(y=1,2,3,4)$;
    c) 3/32; d) 3/32; e) $f_{X|Y=y}(x)=(x+y)/(2y+3)$ $(x=1,2)$ e (y fixo, $y=1,2,3,4$);
    $f_{Y|X=x}(y)=(x+y)/(4x+10)$ $(y=1,2,3,4)$ e (x fixo, $x=1,2$).
14. a) 0.2857; b) 1.3333; c) 1 .
15. a) $F_Y(y)=0$ $(y<2)$, $F_Y(y)=0.11$ $(2\le y<3)$, $F_Y(y)=0.44$ $(3\le y<4)$,
    $F_Y(y)=0.82$ $(4\le y<5)$, $F_Y(y)=1$ $(y\ge 5)$; b) $a=0.04$, $b=0.17$, $c=0.01$,
    $d=0.02$, não são independentes ; c) 22% ; d) $f_{X|Y=4}(0)=2/38$,
    $f_{X|Y=4}(1)=9/38$, $f_{X|Y=4}(2)=17/38$, $f_{X|Y=4}(3)=6/38$, $f_{X|Y=4}(4)=4/38$;
16. b) $f_X(x)=1$ $(0<x<1)$, $f_Y(y)=2$ $(0<y<1/2)$, independentes; c) 0.25; d) 0.25;
17. a) 0.375;

b) $f_X(x) = x + 0.5$ ($0 < x < 1$); $f_Y(y) = y + 0.5$ ($0 < y < 1$), não são independentes;

c) $f_{X|Y=y}(x) = (x + y)/(y + 0.5)$ ($0 < x < 1$) e ($0 < y < 1$, y fixo);
$f_{Y|X=x}(y) = (x + y)/(x + 0.5)$ ($0 < y < 1$) e ($0 < x < 1$, x fixo).

18. a) $F_Y(y) = 0$ ($y < 1$), $F_Y(y) = (15y^2 - 2y^3 - 13)/99$ ($1 \le y < 4$),
$F_Y(y) = 1$ ($y \ge 4$);

b) 1/3; c) $f(x, y) = 2y/33$ ($1 < x < 6 - y, 1 < y < 4$); d) 0.3636.

19. a) $f(x, y) = (10 - x)/500$ ($0 < x < 10,\ 0 < y < 10$); b) 1/3; c) 0.1707.

20. a) $f(x, y) = 1$ ($15 < x < 16$, $15 < y < 16$); b) 0.25; c) 0.5; d) 0.4375.

21. a) F; b) F; c) V; d) F; e) V.