EXERCÍCIOS ADICIONAIS CAPÍTULO 3

1. O número de unidades de um produto procuradas diariamente por uma empresa é uma variável aleatória *X* com função probabilidade dada por:

$$f(x) = 1/5 \quad (x = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Se o produto é vendido durante o dia, proporciona um ganho de 5 euros por unidade; se o não é, deve ser inutilizado, o que acarreta um prejuízo de 4 euros por unidade.

   a) Calcule o valor esperado e a variância de *X*.
   b) Qual deve ser o aprovisionamento diário de modo que o lucro esperado seja máximo?

2. Sabe-se que o primeiro e o segundo momentos em relação à origem da variável aleatória discreta *X*, são iguais a 6 e a 62, respectivamente. Sendo $Y = (X/2) + 3$, determine a média, a variância e o desvio padrão de *Y*.

3. As maças são calibradas em três categorias de acordo com o seu tamanho. Para que uma maçã seja considerada de determinada categoria o seu tamanho não se pode desviar de um certo valor padrão mais do que 2 unidades. Estão a ser embaladas maças da categoria 2 e, como tal, são rejeitadas todas aquelas que não cumprem a norma. Seja *X*, diferença entre o tamanho de uma maçã rejeitada e o valor padrão, uma variável aleatória com função de distribuição,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -4 \\ (16 - x^2)/36 & -4 \le x < -2 \\ 1/3 & -2 \le x < 2 \\ (x^2 - 2x + 4)/12 & 2 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

   a) Classifique, justificando, a variável aleatória *X* e calcule $f(x)$.
   b) Qual a percentagem de maçãs rejeitadas com tamanho superior ao da categoria 2?
   c) Calcule a média e a mediana de *X*.

4. Seja *X* uma variável aleatória com função densidade,

$$f_X(x) = \frac{x^2}{42} \quad (-1 < x < 5).$$

   a) Calcule a média o desvio-padrão de *X*.
   b) Determine a mediana e a amplitude do intervalo interquartis.
   c) Utilizando as propriedades do valor esperado, obtenha a média e a variância da variável aleatória $Y = 5 - 3X$.

5. Seja *X* uma variável aleatória com função densidade definida por,

$$f_X(x) = \begin{cases} x+2 & (-2 < x < -1) \\ -x & (-1 < x < 0). \end{cases}$$

a) Obtenha a média, a mediana e a variância de *X*.
b) Sendo $Z = 2X - 2$, calcule a respectiva média e variância.
c) A variável aleatória *X* tem distribuição simétrica?
d) Qual o coeficiente de assimetria de *X*?

6. Seja *X* uma variável aleatória com função densidade tal que,

$$f_X(x) = \frac{1}{9} x^{-4} \quad (x > 1/3).$$

a) Calcule $P(X > 4 \mid X > 2)$.
b) Calcule a média e a mediana de X. Interprete.
c) Classifique a distribuição de X quanto à assimetria, relacionando com o resultado de a).

7. Seja *X* uma variável aleatória com função geradora dos momentos dada por,

$$M(s) = \frac{2}{5} e^{s} + \frac{1}{5} e^{2s} + \frac{2}{5} e^{3s}.$$

Determine a média e a variância de *X*.

8. Seja *X* uma variável aleatória com função geradora dos momentos M_X. Mostre que a função geradora dos momentos de $Y = a + bX$, com *a* e *b* constantes, é dada por

$$M_Y(s) = e^{as} M_X(bs).$$

9. Seja *X* uma variável aleatória com função probabilidade definida por,

$$f(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5} \right)^{x} \quad (x = 1, 2, 3, \ldots).$$

Obtenha a função geradora dos momentos e utilizando-a calcule a média e a variância de *X*.

10. Seja *X* uma variável aleatória com função densidade definida por

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \quad (x > 0).$$

Obtenha a função geradora dos momentos e, com base nela, calcule a média e a variância de *X*.

11. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.

a) Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 e $Y = kX$, com $k > 0$. Então $\mathrm{Var}(Y) \geq \mathrm{Var}(X)$.
b) Se existir $\mathrm{Var}(X)$ então $\mathrm{Var}(X-2) = \mathrm{Var}(2-X)$.
c) Se a distribuição de *X* for assimétrica positiva e tiver média *μ*, finita, então $P(X \leq \mu) \geq 1/2$.

d) Seja *X* uma variável aleatória contínua com função densidade $f(x)$. Então o 1º quartil é dado por $\xi_{0.25}$: $\int_{\xi_{0.25}}^{+\infty} f(x)\, dx = 0.75$.

e) Suponhamos que *X* e *Y* são variáveis aleatórias cujas funções geradoras dos momentos existem e são iguais. Então pode afirmar-se que $E(X^k) = E(Y^k)$ para todo o *k=1, 2, 3, ...*.

f) Se $Y = 2X$ então a função geradora de *Y* satisfaz $M_Y(s) = [M_X(s)]^2$, onde $M_X(s)$ é a função geradora dos momentos de *X*.

12. A função probabilidade conjunta de (X,Y) é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x+y}{32} \quad (x = 1,2;\ y = 1,2,3,4).$$

a) Obtenha as funções probabilidade marginais de *X* e de *Y*.
b) Mostre que as variáveis não são independentes.
c) Calcule $P(X > Y)$.
d) Calcule $P(X = 2Y)$.
e) Obtenha as funções probabilidade condicionadas.
f) Calcule as médias e as variâncias de *X* e de *Y*.
g) Determine o coeficiente de correlação.
h) Obtenha $E(X \mid Y = y)$.

13. O João, para descontrair nos intervalos da sua preparação para os exames, costuma realizar o seguinte jogo: efectua séries de lançamentos a um cesto de basquetebol, num mínimo de 2 lançamentos e máximo de 4, por série. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional em que X é o número de lançamentos realizados numa série e Y é o número de lançamentos acertados nessa série. A função probabilidade conjunta de (X,Y) é dada por:

x \ y	0	1	2	3	4
2	0.072	0.025	0.003	0.000	0.000
3	0.362	0.162	0.025	0.001	0.000
4	0.231	0.103	0.015	0.0009	0.0001

a) Obtenha as funções probabilidade marginais de *X* e de *Y* e analise a independência das variáveis.
b) Numa série em que o João efectua dois lançamentos calcule probabilidade de não acertar nenhum.
c) Calcule e interprete o significado de $E(Y \mid X = 4)$.
d) Qual a média e o desvio padrão do número de lançamentos falhados por série.

14. Uma empresa possui duas fábricas A e B que produzem o mesmo artigo. Sejam *X* e *Y* as quantidades, em toneladas, mensalmente produzidas, respectivamente, nas fábricas A e B, com funções de distribuição marginais dadas por,

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{16} & 0<x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases} \quad \text{e} \quad F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \dfrac{y}{3} & 0<y<3\\ 1 & y\ge 3\end{cases}.$$

As quantidades produzidas pelas fábricas são independentes.

a) Calcule, justificando, a função densidade conjunta de (X,Y).

b) Qual a percentagem de meses em que a produção da fábrica B é superior à de A?

c) Qual a média e a variância da quantidade total desse artigo produzida mensalmente na empresa.

15. A quantidade semanal de matéria-prima recebida por uma fábrica é uma variável aleatória *X* e a quantidade dessa mesma matéria-prima consumida semanalmente na produção é uma variável aleatória *Y*. Sabe-se que:

$$f_{Y|X=x}(y)=\frac{3y^2}{x^3}\ \ (0<y<x) \text{ com } x \text{ fixo e } 0<x<1\ ;\ f_X(x)=5x^4\ \ (0<x<1).$$

a) Calcule a média e o desvio padrão da quantidade recebida semanalmente.

b) Calcule $E(Y\mid X=x)$ e represente graficamente. Determine e diga qual o significado de $E(Y\mid X=0.75)$.

c) Calcule a média e a variância da quantidade semanal de matéria-prima que fica por consumir.

d) Calcule o coeficiente de correlação entre *X* e *Y*, e comente o resultado.

16. Uma fábrica utiliza na sua produção uma determinada matéria prima que compra a dois fornecedores F1 e F2. Seja (X,Y) a variável aleatória que representa a quantidade (em toneladas) dessa matéria prima fornecida mensalmente por F1 e F2, respectivamente. Conhece-se:

$$f_X(x)=\frac{9-x^2}{18} \quad (0<x<3)$$

$$f_{Y|X=x}(y)=\frac{1}{3-x} \quad (1<y<4-x) \qquad (x\ fixo,\quad 0<x<3).$$

a) Calcule a função de distribuição marginal de *X.*

b) Determine $E(Y\mid X=x)$. Calcule o seu valor para $x=1$ e diga qual o seu significado.

c) Determine a função densidade conjunta, $f(x,y)$, e indique, <u>sem efectuar os cálculos</u>, como calcularia a percentagem de meses em que a quantidade fornecida por F1 é superior à fornecida por F2?

17. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente:

a) Existindo os valores esperados envolvidos, se $E(XY)=E(X)E(Y)$ então X e Y são independentes.

b) Existindo $\mathrm{Var}(X)$ e $\mathrm{Var}(Y)$ tem-se sempre que $\mathrm{Var}(X-Y)\le \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$.

c) Se *X* e *Y* são variáveis aleatórias tais que $\mathrm{cov}(X,Y)=3$, então *X* e *Y* não podem ser independentes.

d) Se *X* e *Y* são independentes com $\mathrm{var}(X)=\mathrm{var}(Y)=\sigma^2$, então $\mathrm{var}(X+2Y)=3\sigma^2$.

e) Um par de variáveis aleatórias contínuas diz-se negativamente associado se a sua função densidade conjunta, $f(x,y)$, verifica $-1 \leq f(x,y) \leq 0$ para todo o par (*x,y*).

18. Seja *X* uma variável aleatória em que $E(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$. Considere a variável aleatória $Z = X_1 + X_2$, onde X_1 e X_2 são duas observações independentes de *X*. Calcule o coeficiente de correlação entre *Z* e X_1.

SOLUÇÕES

1. a) 2, 2; b) 2.
2. 6, 6.5, 2.5495.
3. a) v.a. contínua ; $f_X(x) = -x/18 \quad (-4 < x < -2)$, $f_X(x) = (x-1)/6 \quad (2 < x < 4)$, $f_X(x) = 0$ outros valores ; b) 2/3 ; c) 29/27; $1+\sqrt{3}$.
4. a) 26/7; 1.044 b) 3.9579, 1.4144; c) – 6.1429, 9.8082.
5. a) -1, -1, 1/6; b) -4 , 2/3; c) sim; d) 0.
6. a) 0.125; b) 0.5, 0.4200; c) assimétrica positiva.
7. 2, 0.8.
8. --
9. 5, 20.
10. $M(s) = 1/(1-3s)$ com $s < 1/3$, 3, 9
11. a) F; b) V; c) V; d) V; e) V; f) F.
12. a) $f_X(x) = (2x+5)/16$ ($x = 1,2$); $f_Y(y) = (2y+3)/32$ ($y = 1,2,3,4$);

    c) 3/32; d) 3/32; e) $f_{X|Y=y}(x) = (x+y)/(2y+3)$ ($x = 1,2$) e (*y* fixo, $y = 1,2,3,4$);

    $f_{Y|X=x}(y) = (x+y)/(4x+10)$ ($y = 1,2,3,4$) e (*x* fixo, $x = 1,2$).

    f)1.5625, 0.2461, 2.8125, 1.1523; g) -0.0367 ;

    h) 1.6, 1.5714, 1.5556, 1.5455 ou $E(X \mid Y = y) = \dfrac{5+3y}{3+2y} \quad (y = 1,2,3,4)$.
13. a) $f_X(2) = 0.1$, $f_X(3) = 0.55$, $f_X(3) = 0.35$; $f_Y(0) = 0.665$, $f_Y(1) = 0.29$ $f_Y(2) = 0.043$, $f_Y(3) = 0.0019$, $f_Y(4) = 0.0001$, não são independentes ;

    b) 0.72; c) 0.3889; d) 2.8679, 0.8385.
14. a) $f(x,y) = x/24$ ($0 < x < 4, 0 < y < 3$) ; b) 0.1875 ; c) 4.1667, 1.6389.
15. a) 5/6, 0.1409; b) $3x/4$, $(0 < x < 1)$, 0.5625; c) 0.2083, 0.0280 ; d) 0.5423.
16. a) $F_X(x) = 0$ ($x < 0$), $F_X(x) = (x/2) - (x^3/54)$ ($0 \leq x < 3$), $F_X(x) = 1$ ($x \geq 3$);

    b) $(5-x)/2$ $(0 < x < 3)$, 2.
17. a) F; b) F; c) V; d) F; e) F.
18. 0.7071.