Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 3

(1) (a) Prove, utilizando o princípio de indução matemática, que
$$1+2+3+\ldots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2, \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$
(b) Considere o conjunto $A=\left\{\dfrac{1+(-1)^n n}{2n} : n\in\mathbb{N}\right\}$. Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de A, e, caso existam, o mínimo de A e o máximo A.

(2) Prove que, sendo A e B subconjunots de $\mathbb{R}$ majorados se tem
$$\sup(A\cup B)=\max\{\sup(A),\sup(B)\}.$$

(3) Sejam A, B e C os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
$$A=\left\{\frac{n}{n^2+1} : n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left]\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right[\cup\left\{\frac{n+1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\},$$
$$B=\left\{1+(-1)^n\frac{n+2}{n+1} : n\in\mathbb{N}\right\} \qquad \text{e} \qquad C=\{m+1/n\colon n,m\in\mathbb{N}\}.$$
(a) Determine o interior, a fronteira e o derivado de cada um dos conjuntos.
(b) Calcule o conjunto dos majorantes e minorantes de A, B e C e indique, caso exista, o máximo e o mínimo de cada um deles.

(4) Dê exemplo (se possível) de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que seja
(a) finito não vazio e aberto
(b) fechado não limitado
(c) igual ao derivado
(d) igual à fronteira
(e) finito não majorado

(5) Considere o seguinte subconjuto de $\mathbb{R}$:
$$X=\{x\in\mathbb{R}\backslash\{0\} : x/x^{-1}\le x^{-1}/x\}.$$
(a) Indique, caso existam, o supremo e o ínfimo de X.
(b) O conjunto X é um conjuto aberto? E fechado? Justifique.

(6) Prove que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto se e só se $\mathbb{R} \backslash A$ é um conjunto fechado.

(7) Determine o interior, a fronteira e o derivado dos seguintes conjuntos:
   (a) $[0, 2[\cup]3, 5[\cup \{6, 7\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 9\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x - 3| \leq 5\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{R} \colon x - 1 \geq x\}$
   (e) $\{x \in \mathbb{R} \colon (x - 1)/(x + 3) > x/(x - 2)\}$
   (f) $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$.

(8) Mostre que em $\mathbb{R}$ um conjunto aberto não pode ter nem máximo nem mínimo. *Sugestão*: Note que o supremo é um ponto na fronteira.

(9) (a) Mostre que $A \subset \mathbb{R}$ é simultaneamente fechado e aberto sse $\operatorname{front} A = \emptyset$.
   (b) (*) Mostre que $\operatorname{front} A = \emptyset$ sse $A \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.