Matemática I - 2008/2009

Ficha de exercícios n^o 4

Funções reais de variável real

Exercícios do livro *Sydsaeter, Knut e Hammond, Peter J., Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall, 2003*:

2.2: 14,16
2.5: 8,12
3.1: 10
3.3: 4
3.5: 2
4.4: 4,6
6.1: 1,2
6.2: 4,8
6.7: 2,4
4.5: 7
4.6: 2,4,10
4.7: 2,4
5.2: 2
5.3: 2,4
8.2: 20

Exercício 1 *Determine o domínio das seguintes funções.*

a) $f(x) = \frac{1}{x+3}$ b) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ c) $h(x) = \ln(3-2x)$

d) $i(x) = \sqrt{x^2-25}$ e) $j(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ f) $k(x) = \ln(\ln x)$

g) $l(x) = \frac{1}{\ln(1-|x-1|)}$ h) $m(x) = \frac{\ln(4-x^2)}{\sqrt{e^x-1}}$

Exercício 2 *Para que valores reais de a e b a função* $f(x) = \begin{cases} ax-2 & se\ x \leq 1 \\ b-2x^2 & se\ x > 1 \end{cases}$ *é contínua ?*

Exercício 3 *Estude o domínio e a continuidade das seguintes funções:*

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \ln\left(1+x^2\right) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

Exercício 4 *Seja a função f definida por* $f(x) = \begin{cases} x^3 & se\ x \leq a \\ a(x-2a)^2 & se\ x > a \end{cases}$

a) Estude a continuidade e a diferenciabilidade da função f no ponto $x = a$.

b) Escreva a função $f'(x)$.

Exercício 5 *Derive as seguintes funções:*

a) $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2$

b) $\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^3$

c) $\sqrt{x-3}$

d) $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}$

e) $x + \sqrt{x^2-1}$

f) $\frac{3}{\sqrt{x}}$

g) $e^{-\frac{x}{2}}$

h) e^{x^2}

i) xe^x

j) $\ln\left(x^2+1\right)$

k) $\ln(\sin x)$

l) $\frac{x}{\ln x}$

m) $\ln\left(e^{3x}+x^2\right)$

n) $e^x \ln x$

o) $\sin(2x+1)$

p) $\cos\left(3x^2-x\right)$

q) $\cos x + x\cos^2\left(x^2\right)$

r) $\sin x \cos x$

s) $\tan\left(x^2+1\right)$

t) $\ln\frac{1+x}{1-x}$

u) $\ln^4\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

v) $e^{x^3}\ln\left(x^2\right)$

Exercício 6 *Indique a equação da recta tangente ao gráfico da função* $y = f(x)$, *definida implicitamente pela equação* $\sin(xy) = y$, *no ponto* $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$:

a) $y = x$ b) $y = 1$ c) $y = 1 + \frac{\pi}{2}x$ d) $y = x + \frac{2-\pi}{2}$

Exercício 7 *Seja a função* $h(x) = f(x \ln x)$, *com* f *diferenciável em* $\mathbb{R}$. *Sabendo que* $f(0) = \sqrt{3}$ *e que* $f'(0) = 2$, *indique a equação da recta tangente ao gráfico da função* h *em* $x = 1$:

a) $y = 2x - \sqrt{3}$ b) $y = \sqrt{3}x + 2$ c) $y = -2x + \sqrt{3}$ d) $y = 2x - 2 + \sqrt{3}$