

Matemática I - 2008/2009

Ficha de exercícios nº 6

Funções reais de variável real

Exercícios do livro *Sydsaeter, Knut e Hammond, Peter J., Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall, 2003:*

7.5: 1,3

7.6: 6,13

Exercício 1 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin x} - e^{\cos x}}{\sin x - \cos x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^2}{e^{2x-1} - 4x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

Exercício 2 Indique o valor correcto de $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^\alpha - 2\alpha(x-1) - 2}{3x^2 - 6x + 3}$:

a) $L = -\alpha - 3$ b) $L = 0$ c) $L = \frac{\alpha^2 - \alpha}{3}$ d) L não existe

Exercício 3 Indique o valor correcto de $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{5x}$:

a) L não existe b) $L = 1$ c) $L = +\infty$ d) $L = 0$

Exercício 4 Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} & \text{se } x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- a) Mostre que f é uma função contínua em $x = 0$.
- b) Estude a diferenciabilidade de f em $x = 0$.
- c) Escreva a função derivada de f , $f'(x)$.

Exercício 5 *Seja a função:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{e^x - 1} & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Indique a resposta correcta:

- a) f é diferenciável e é contínua em $x = 1$.
- b) f é diferenciável e não é contínua em $x = 1$.
- c) f não é diferenciável e é contínua em $x = 1$.
- d) f não é diferenciável e não é contínua em $x = 1$.

Exercício 6 *Sabendo que $f(x) = x^3 + 2x - 1$ admite uma função inversa g e que $f(1) = 2$, indique o declive da recta tangente ao gráfico de g no ponto indicado:*

- a) $\frac{1}{5}$
- b) 1
- c) 2
- d) 5

Exercício 7 *Calcule:*

- a) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$
- b) $\cos\left(\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$
- c) $\tan\left(\arctan\left(\frac{-7}{3}\right)\right)$
- d) $\cos\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$
- e) $\tan\left(\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$

Exercício 8 *Resolva :*

- a) $5^{x-1} > 5^{5-4x}$
- b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{3x}$
- c) $\ln(3x+1) > \ln x$
- d) $\log_3(x^2-1) < 2$
- e) $\log_{\frac{1}{e}}(x^2-x) < \log_{\frac{1}{e}} x$
- f) $\arccos(2x) = \frac{\pi}{6}$
- g) $1 - 3 \arctan(3x) = \pi \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$
- h) $3^{x^2-5x} = \frac{1}{81}$
- i) $x^2 \cdot 5^{-x} - 3 \cdot 5^{-x} = 0$
- j) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$
- k) $\log_x 25 = -1$