Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciatura MAEG
Processos Estocásticos e Aplicações
16 de Junho de 2008

1. Suponha que o comportamento dos contribuintes de IRS de um determinado país com 10 milhões de contribuintes, podem ser classificado em 3 categorias: A - os que não praticam evasão fiscal, B - os que praticam algumas vezes evasão fiscal e C - os que praticam sempre evasão fiscal. A classificação feita pelas finanças relativamente a um contribuinte pode ser alterada de ano para ano.

   Uma auditoria revelou que, 95% dos contribuintes que estavam no ano passado classificados na categoria A, continuam este ano na mesma categoria e 5% são colocados na categoria B. Dos que estavam na categoria B no ano transacto, 5% são classificados na categoria A, 90% ficam na mesma e 5% são colocados na categoria C. Dos que estavam colocados na categoria C, as percentagens respectivas são 0%, 10% e 90%.

   (a) Formule o problema como uma cadeia de Markov, indicando os estados e a matriz de probabilidades de transição. (10)

   (b) Qual é, no longo prazo, a percentagem de contribuintes em cada uma das categorias? (15)

   (c) A mesma auditoria revelou que a evasão fiscal anual praticada por um contribuinte classificado na categoria B, é em média praticada sobre um rendimento de 5 mil euros, enquanto que para os da categoria C é sobre 10 mil euros. Supondo uma taxa de IRS fixa de 12%, determine a redução anual à colecta de IRS devido a evasão fiscal. (10)

2. Uma pequena vila é servida por duas empresas de táxis. Cada empresa tem apenas dois táxis e sabe-se que as duas empresas partilham o mercado de forma praticamente igual. Isto é evidente pelo facto de as chamadas à central de cada empresa ocorrerem à taxa de oito por hora. A média de cada percurso efectuado é de 12 minutos (independentemente da companhia). As chamadas ocorrem às centrais segundo processos de Poisson independentes e o tempo de cada percurso tem distribuição exponencial. As duas companhias foram recentemente adquiridas por um investidor que está a pensar em as fundir.

   (a) Descreva as duas situações (antes e após a fusão) do ponto de vista das filas de espera e calcule o tempo médio de um cliente à espera de que o seu serviço se inicie (suponha que o seu serviço se inicia no instante em que o táxi se desloca da praça de táxis para o locar indicado pelo cliente), bem como o número médio de pessoas em espera em cada sistema de espera. (30)

   (b) Determine a probabilidade de que todos os táxis da vila estarem em serviço, nas duas situações. (15)

   (c) Determine o número esperado de táxis sem clientes nas duas situações. (15)

3. Suponha que $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ é um processo de Poisson com intensidade 3. Seja W_n o instante de ocorrência no $n-$ ésimo acontecimento. Calcule, justificando,

   (a) $E[W_4]$ (10)

   (b) $E[W_4|N(1)=1]$ (15)

   (c) $E[N(2)|N(1)=1]$ (15)

4. Considere uma sucessão de variáveis aleatórias não negativas, $\{S_k; k=1,2,\ldots\}$, independentes e identicamente distribuídas, a designarem as indemnizações agregadas anuais de uma carteira de uma seguradora, a possuírem função geradora de momentos. Seja, U_n a reserva da companhia no ano n, com

$$U_n = u + \sum_{k=1}^{n}(c - S_k), \qquad n = 1, 2, ...,$$

   $(U_0 = u)$, com $u > 0$ e $c > E[S_k]$, com c a designar o prémio anual relativo à carteira. Seja R a única raíz positiva (em r) de

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{r(S_k - c)}\right] = 1, \; k = 1, 2, ...$$

   (a) Prove que $\{\mathrm{e}^{-RU_n}; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ é uma martingala relativamente a $\{S_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$. (25)

   (b) Atendendo à alínea anterior e a que a probabilidade de ruína em horizonte infinito é (15)

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \Pr\{U_n < 0, \text{ para algum } n\} = \\ &= \Pr\{\mathrm{e}^{-RU_n} > 1, \text{ para algum } n\} = \\ &= \Pr\{\max_{0\leq n<+\infty} \mathrm{e}^{-RU_n} > 1\}\end{aligned}$$

   prove que

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

5. Seja $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ um movimento Browniano standard. Calcule, justificando, $E[B(t)B(s)]$ para $0 < s < t < +\infty$. (25)