Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciatura MAEG

Processos Estocásticos e Aplicações
(Exame com consulta limitada ao formulário; Duração: 2h30m)
13 de Janeiro de 2009

1. Considere um sistema NCD (no claim discount) do ramo automóvel a funcionar do seguinte modo: uma apólice pode ter 0%, 25% ou 50% de desconto no seu prémio anual. Se não originar indemnizações num ano transita para o nível de desconto seguinte (ou retem o desconto se já tinha o nível máximo de desconto). Uma ou mais indemnizações originam a transição para o nível anterior (ou a permanência no desconto nulo). Considere que a probabilidade de um segurado não originar indemnizações num ano é 3/4.

   (a) Descreva o modelo como uma cadeia de Markov. (10)

   (b) Calcule a probabilidade de um segurado ter um nível de desconto máximo no período $n+3$ dado que tinha desconto nulo no perído n. (10)

   (c) Calcule a probabilidade de estando no nível de desconto de 25% num determinado ano, ter o mesmo nível de desconto passados 4 anos. (10)

   (d) Calcule a percentagem de segurados com desconto máximo (numa prespectiva de longo prazo). (10)

   (e) Considere a seguinte modificação ao sistema NCD anterior: Os níveis de desconto são 0, 25%, 40% e 60%. As regras de transição entre classes são como anteriormente, mas no caso de declaração de pelo menos uma indemnização, a apólice é penalizada em dois ou em apenas um nível de desconto, consoante no ano anterior tivesse originado ou não indemnizaões. Diga como pode descrever o modelo através de uma cadeia de Markov, defenindo os estados e a matriz das probabilidades de transição. (20)

2. Seja $\{N(t); t \geq 0\}$ um processo de Poisson homogéneo, com intensidade λ. Seja

$$X(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} Y_j,$$

onde $Y_0 \equiv 0$ e $\{Y_j\}_{j=1,2,\ldots,N(t)}$ é uma sucessão de v.a. i.i.d., com função geradora de momentos M_Y, e independentes de $N(t)$. Deduza a função geradora de momentos de $X(t)$. (25)

3. Considere que um banco possui dois caixas. Chegam em média 80 clientes por hora e aguardam pela sua vez numa fila única. O tempo médio de serviço é de 1.2 minutos por cliente. Suponha que os tempos entre chegadas e os tempos de serviço são exponenciais.

   (a) Determine o número médio de clientes presentes na fila e o número médio de clientes no banco. (20)

   (b) Determine o tempo médio que cada cliente passa no banco (em cada visita). (10)

   (c) Determine a percentagem de tempo que um determinado caixa está sem clientes. Justifique. (15)

   (d) Determine a probabilidade de um cliente ter de esperar mais de 4 minutos na fila até começar a ser atendido. (10)

   (e) Considere que quando um determinado cliente chega, há dois clientes no banco (a serem atendidos pelos dois caixas). Qual é o tempo médio que esse cliente passa no banco? Justifique. (20)

4. Seja $\{\xi_n\}_{n=0,1,\ldots}$ uma sussessão de v.a. positivas e e i.i.d. com média finita e seja $X_n = X_0.\xi_1 \ldots \xi_n$. O valor $\xi_n - 1$ pode ser interpretado como a variação no valor de um activo financeiro num período de amplitude fixa, relativamente ao seu valor corrente. No modelo de Black-Scholes a tempo discreto, considera-se que $\xi_i = \exp(\eta_i)$ com η_i com distribuição Normal(μ, σ^2). Para que valores de μ e de σ é $\{X_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ uma martingala? (20)

5. Seja $\{B(t)\}$ um movimento Browniano standard e μ e $\sigma > 0$ fixos. Considere o movimento Browniano com deriva $\{W(t)\}$, $W(t) = \mu t + \sigma B(t)$. Calcule $E[W(t)]$ e $Cov[W(s), W(t)]$ para $s < t$. (20)