Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciatura MAEG

Processos Estocásticos e Aplicações

(Exame com consulta limitada ao formulário; Duração: 2h30m)

13 de Janeiro de 2009

Tópicos de Solução

1. (a) $S = \{A, B, C\}$
   A - apólice com 0% de desconto
   B - apólice com 25% de desconto
   C - apólice com 50% de desconto

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

   (b) $P_{AC}^{(3)} = 9/16$

   (c) $P_{BB}^{(4)} = \frac{33}{128}$

   (d) $\begin{cases} \begin{bmatrix} \pi_A & \pi_B & \pi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_A & \pi_B & \pi_C \end{bmatrix} P \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_A = 1/13 \\ \pi_B = 3/13 \\ \pi_C = 9/13 \end{cases}$

   Solução: 69.23% dos segurados têm desconto máximo.

   (e) A - apólice com 0% de desconto
   B - apólice com 25% de desconto
   C^- - apólice com 40% de desconto e originou indemnização no ano anterior
   C^+ - apólice com 40% de desconto e não originou indemnização no ano anterior
   D - apólice com 60% de desconto

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

2. $M_{X(t)}(r) = E\left[e^{r\sum_{j=0}^{N(t)} Y_j}\right] = E\left[E\left[e^{r\sum_{j=0}^{N(t)} Y_j}\right] |N(t)\right] = E\left[(M_Y(r))^{N(t)}\right] = P_{N(t)}(M_Y(r)) = e^{\lambda t(M_Y(z)-1)}$

3. (a) Modelo (M|M|2) com $\lambda = 4/3$ (em minutos) e $\mu = 5/6$ (em minutos). $\theta = 8/5$ e $\varrho = 0.8$.
   $\pi_0 = \left(1 + 8/5 + \frac{(8/5)^2}{2\times 0.2}\right)^{-1} = 0.111\,11$

$\pi_1 = 8/5 \times \pi_0 = 0.177\,78$
$\pi_2 = 2 \times 0.8^2 \times \pi_0 = 0.14222$
$L_q = \pi_2 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = 2.84444$
$L_q = L - \pi_1 - 2(1 - \pi_0 - \pi_1)$, isto é $L = L_q + \pi_1 + 2(1 - \pi_0 - \pi_1) = 4.44444$

(b) $W = L/\lambda = 3.333\,3$ minutos

(c) $\pi_0 + 0.5\pi_1 = 0.2$ (resposta: 20% do tempo).

(d) $Pr\{T_q > 4\} = \pi_2 \frac{1}{1-\rho} \exp(-(s\mu - \lambda)4) = 0.187\,44$

(e) O tempo de espera na fila será neste caso o mínimo entre duas exponenciais independentes de parâmetro $\mu = 5/6$, que ainda é uma exponencial de parâmetro média $1/(2\mu) = 3/5$. O tempo total é o tempo de espera na fila mais o tempo de atendimento. Como este é uma exponencial de média $6/5$. Temos que o valor esperado do tempo total no banco, neste caso, será de $9/5 = 1.8$ minutos.

4. $E[|X_n|] < +\infty$ para μ e σ finitos. Além disso

   $E[X_{n+1}|X_0, X_1, ..., X_n] = \cancel{X}_n E[\xi_{n+1}]$. Assim $\{X_n\}$ é uma martingala se $E[\xi_{n+1}] = 1$, isto é se $E[\xi_{n+1}] = E[e^{\eta_{n+1}}] = M_{\eta_{n+1}}(1) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} = 1$, i.e. $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$. Assim $\{X_n\}$ é uma martingala no conjunto $\{(\mu, \sigma) : \mu < 0,\ \sigma^2 = -2\mu\ \}$.

5. $E[W(t)] = \mu t$ e $Cov[W(s), W(t)] = \sigma^2 Cov(B(s), B(t)) = \sigma^2 Cov(B(s), B(s) + B(t) - B(s)) = \sigma^2 s$.