Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciatura MAEG

Processos Estocásticos e Aplicações
(Exame com consulta limitada ao formulário; Duração: 2h30m)
29 de Janeiro de 2009

Tópicos de Solução

1. $\{1,2,3\}$ e $\{0,4\}$; $d(i)=2$, $\forall i=0,1,2,3,4$.

2. $$\begin{cases} h_0 = 1 + 0.4h_0 + 0.6h_1 \\ h_1 = 0.3h_1 + 0.7h_2 \\ h_2 = 1 + 0.1h_0 + 0.7h_1 + 0.2h_3 \\ h_3 = 0 \end{cases}$$

3. $\Pr\{N(3)=4|N(1)=1\} = 0.195366815$, tendo em conta o facto de os incrementos serem independentes e estacionários

   $\Pr\{N(1)=1|N(3)=4\} = 0.395061728$, pela mesma razão.

4. (a) $\lambda_n = (K-n)\lambda$, $n=0,1,2,...,K$
   $\mu_n = \mu \min\{R,n\}$, $n=0,1,2,...,K$

   (b) Calculam-se os θ_n , seguidos do π_0 e dos π_n, tendo em contas as taxas da alínea a).

   (c) Pode provar-se que (e era dito) $\pi_{n+1} = (K-n)\rho\pi_n, .n = 0,1,2,...,K$ (note-se que $\pi_{K+1} = 0$). Então $\sum_{n=0}^{K} \pi_{n+1} = \sum_{n=0}^{K}(K-n)\rho\pi_n \Rightarrow 1-\pi_0 = K\rho - \rho\sum_{n=0}^{K} n\pi_n \Rightarrow L = K - \frac{1-\pi_0}{\rho}$.

      i. $\lambda = 1/10$; $\mu = 1/8$; $\rho = 0.8$.
      O técnico apenas não está ocupado quando não há máquivas avariadas. Assim a percentagem de tempo em que o técnico está ocupado é $1-\pi_0$. Como π_0 =0.257731959 tem-se que a percentagem requerida é cerca de 74%.

      ii. Só há máquinas à espera de serem reparadas quando estão duas avariadas. Assim o número médio de máquinas à espera de serem reparadas é $1 \times \pi_2 = \pi_2 = 0.329896907$.

5. (a) Prova-se que $E[Y(t)] < \infty$ e que $E[Y(t)|Y(r_1), ...Y(r_n), Y(s)] = Y(s)$ para $0 \le r_1 \le ... \le r_n \le s$.

   (b) Sim é um movimento Browniano geométrico com coeficiente de deriva $\alpha = 0$, coeficiente de difusão $\sigma^2 = c^2$ e $Y(0) = 1$ (mas não é um movimento Browniano simples).