Análise Matemática III

LISTA 1 [1]

(1) Descreva parametricamente cada uma das seguintes curvas:
   (a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2/4 = 1\}$.
   (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ z = 3\}$.
   (c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 1/2\}$.

(2) Considere a curva definida parametricamente por

$$M = \{(e^t \cos t, e^t \sin t) \in \mathbb{R}^2 \colon t \in]0, 2\pi[\}.$$

   (a) Determine os espaços tangente e normal em $(0, e^{\pi/2})$.
   (b) Seja φ um C^1-difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$. Mostre que $\varphi(M)$ é também uma curva.
   (c) Calcule o espaço tangente a $\varphi(M)$ no ponto $\varphi(0, e^{\pi/2})$ com

$$D\varphi(0, e^{\pi/2}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) Esboce detalhadamente os seguintes conjuntos:
   (a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < 1,\ x^2 < y < 2x^2\}$.
   (b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < y < 1,\ -\sqrt{1 - y^2} < x < 2y^2 - 1\}$.
   (c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x < 1,\ x^2/2 < y < x^2,\ 0 < z < x^2\}$.
   (d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x,\ 0 < z < x + y\}$.
   (e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2/4 < 1\}$.
   (f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < z^2 + 1\}$.

(4) ** Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma m-variedade. Mostre que localmente M é o gráfico de uma função. Isto é, mostre que dado $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de p, um aberto $V \subset \mathbb{R}^m$ e uma função $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-m})$ tais que

$$M \cap U = \{(z, f(z)) \colon z \in V\}.$$

Sugestão: Considere uma parametrização em redor de p dada por $\phi \colon A \to M$ com $A \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Esta tem a forma $\phi(t_1, \ldots, t_m) = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$. Use o teorema da função inversa para escrever $n - m$ coordenadas dos pontos em M em função das restantes m coordenadas. Recorde que $D\phi$ tem característica m em qualquer ponto.

[1] Comentários e/ou correcções para jldias@iseg.utl.pt. As questões mais difíceis encontram-se marcadas com *. A colaboração entre colegas é encorajada, mas cada estudante deve escrever as suas próprias soluções, compreendê-las e dar crédito aos seus colaboradores.