Matemática I – 1º Semestre 2011/11
Ficha de exercícios

Semana 4: Cap. 3 – Sistemas de Equações Lineares $k \times n$

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Sejam as seguintes equações/sistema: $i)$ $x + 3 = 1$ $ii)$ $x^2 = 4$ $iii)$ $\begin{cases} x+3=1 \\ x^2=4 \end{cases}$.

a) Identifique a equação não-linear.
b) Resolva estas equações e este sistema analiticamente.
c) Resolva estas equações e este sistema graficamente.

1.2. Determine o conjunto de soluções da equação $x + y = 1$ e classifique-a.

1.3. Resolva e classifique o sistema de equações: $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$. Verifique o resultado graficamente.

1.4. Discuta a existência de soluções para os sistemas que se seguem, determinando — sempre que possível — o número de graus de liberdade e as soluções:

a) $\begin{cases} -2x-3y+z=3 \\ 4x+6y-2z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+2z+w=1 \\ 2x+y-z+3w=3 \\ x+5y-8z+w=1 \\ 4x+5y-7z+7w=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+3y+2z+4w=0 \\ 2x+y-w=0 \end{cases}$.

1.5. Determine, para o sistema $\begin{cases} y+az=0 \\ x+by=0 \\ by+az=1 \end{cases}$, em função dos parâmetros reais a e b:

a) o número de equações independentes;
b) o número de equações supérfluas;
c) o número de equações incompatíveis.

1.6. Classifique o sistema de equações em função dos valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ x-y-z=a \end{cases}$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Defina equação, sistema de equações e grau de liberdade de um sistema de equações.

2.2. Sejam as constantes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $b, c \in \mathbb{R}$. Demonstre que $ax + b = c \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}(c - b)$.

2.3. Sejam 3 vectores de dimensão 4: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^4$.
a) Mostre que a equação vectorial $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}$, de incógnitas λ_i, corresponde a um sistema de 4 equações lineares com 3 incógnitas.
b) Este sistema é possível? Porquê?
c) Generalize os resultados anteriores para ℓ vectores de dimensão p.

2.4. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Um sistema de equações lineares com igual número de equações e de incógnitas tem uma única solução.

b) Um sistema de equações lineares com igual número de equações e de incógnitas tem pelo menos uma solução.

c) Um sistema de equações lineares com mais equações do que incógnitas pode ter uma infinidade de soluções.

d) Um sistema de equações lineares com menos equações do que incógnitas pode não ter solução.

3 Problemas e Modelização

3.1. Uma fábrica de automóveis utiliza 3 tipos diferentes de aço para a produção de cada um dos seus três modelos de carro A, B e C. Cada modelo necessita das seguintes quantidades de aço (em toneladas):

Aço \ Carro	Modelo A	Modelo B	Modelo C
Aço tipo 1	2	3	4
Aço tipo 2	1	1	2
Aço tipo 3	3	2	1

Determine a quantidade de carros que podem ser produzidos utilizando 29, 13 e 16 toneladas de aço tipo 1, 2 e 3 respectivamente.

3.2. Imagine uma região com uma economia fechada que depende de três industrias: serviços de telecomunicações, produção de electricidade e produção de combustível. A produção anual destas industrias é tal que:

1. Para produzir 10 unidades de serviços de telecomunicações, a respectiva industria consome 3 unidades da sua própria produção, 3 unidades de electricidade e 3 unidades de combustível.

2. Para produzir 10 unidades de electricidade, a respectiva industria consome 4 unidades de telecomunicações, 1 unidade da sua própria produção e 5 unidades de combustível.

3. Para produzir 10 unidades de combustível, a respectiva industria consome 3 unidades de telecomunicações, 6 unidades de electricidade e 2 unidades da sua própria produção.

Sabendo que se trata de uma economia fechada, onde a produção de cada industria é igual ao total dos seus consumos, determine a produção de cada uma das três industrias.

3.3. Considere o seguinte sistema de equações lineares: $\begin{cases} x + 2y - \alpha z = 1 \\ 2x - \ \ y - \ \ z = \beta \\ 9x - 2y + \ \ z = -1 \end{cases}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Classifique o sistema em função dos valores dos parâmetros α e β.
b) Resolva o sistema para $\alpha = \beta = 0$.
c) Mostre que a distância entre a solução encontrada na alínea *b)* e o vector $\left(-\frac{24}{25}, -\frac{38}{25}, -\frac{2}{5}\right)$ é igual a $\sqrt{5}$.

4 Exercícios adicionais

4.1. Classifique os seguintes sistemas de equações em função dos valores dos parâmetros reais a e b:

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + az = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = a \\ 2x + bz = 2 \end{cases}$.

4.2. Seja $A\vec{x} = \vec{b}$ um sistema com 4 equações e 5 incógnitas. Sabendo que o sistema tem dois graus de liberdade, indique a característica da matriz do sistema A:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 1

4.3. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & b \end{bmatrix}$, com a, $b \in \mathbb{R}$ e $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ com $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 4$.
a) Discuta a característica da matriz A em função dos valores de a e b.
b) Indique os valores de a e b para os quais o sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ é determinado.

4.4. Seja o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + \ \ y + \ \ \ z = 1 \\ x + 2cy + 2cz = 1 \\ 2x + \ \ y + \ \ cz = b \end{cases}$.

Indique a resposta correcta:
a) Se $c \neq 1$ e $b \neq 1$ o sistema é possível e indeterminado.
b) Se $c = 1$ ou $c = \frac{1}{2}$, $\forall\, b \in \mathbb{R}$ o sistema é possível e determinado.
c) Se $c = 1$ e $b \neq 2$ o sistema é impossível.
d) Se $c \neq \frac{1}{2}$, $\forall\, b \in \mathbb{R}$ o sistema é possível e indeterminado.

4.5. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 15.1: Exercícios 1, 3, 5 e 6;
Secção 15.6: Exercícios 1 a 4.