

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 5

(1) Calcule, ou prove que não existe, o limite das seguintes sucessões:

- (a) $n!n^{-1000}$
- (b) $2^n n^{-2}$
- (c) $\sqrt[n]{\frac{n^2+n-1}{n+3}}$
- (d) $\sqrt[n]{2^n + 1}$
- (e) $\sqrt[n]{n!}$
- (f) $(1 + \frac{1}{n^2})^{n^3}$
- (g) $(1 + \frac{1}{n^3})^{n^2}$
- (h) $n^{1/n}$
- (i) $n^{-1/n}$
- (j) n^{-n}

(2) Diga se são monótonas e limitadas as seguintes funções, indicando (se possível) os seus máximos e mínimos nos respectivos domínios.

- (a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x|}{x}$
- (b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{2}{1+x^4}$
- (c) $h: [-a, a[\rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^n$ onde $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}^+$
- (d) $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \phi(x) = \sqrt{x^2} - 1$
- (e) $\theta:] - \pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}, \theta(x) = \tan x.$

(3) Recorde as relações trigonométricas seguintes:

$$\sin(a + b) = \cos(a) \sin(b) + \sin(a) \cos(b),$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

- (a) Calcule $\sin(2a)$ e $\cos(2a)$ como funções de $\sin(a)$ e $\cos(a)$.
- (b) Deduza as fórmulas

$$\cos^2(a/2) = \frac{1 + \cos(a)}{2}, \quad \sin^2(a/2) = \frac{1 - \cos(a)}{2}.$$

- (c) Usando as fórmulas acima, determine $\sin(\pi/4)$ e $\cos(\pi/4)$.
- (d) Demonstre as seguintes igualdades:

(i) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

(ii) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

- (iii) $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
 (iv) $\cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1$
 (v) $\cos(2 \arcsin x) = 1 - 2x^2$

(4) Sejam as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $x = 1$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \arcsin(x), & -1 < x < 1 \\ K \sin(\frac{\pi}{2}x), & x \geq 1 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \frac{x + |x|}{2} D(x) \quad \text{onde} \quad D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (a) Calcule K e estude a continuidade de f e g em \mathbb{R} .
 (b) Determine (se possível) $f(\mathbb{R})$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, $g(\mathbb{R})$, $\sup g$, $\inf g$, $\max g$, $\min g$.
 (c) Calcule (se possível): $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(5) (*) Considere a função

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}.$$

- (a) Determine o domínio e o contradomínio de f . Sugestão: Note que $\sqrt{x} = \sqrt{1+(x-1)}$.
 (b) Justifique que f é injectiva.
 (c) Calcule a função inversa de f (i.e. f^{-1}).

(6) Determine os pontos de descontinuidade das seguintes funções:

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 2, & x \notin \mathbb{Z} \\ |1+x| + |1-x|, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(7) (*) Diga quais são os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$