Análise Matemática III

LISTA 5

(1) Calcule o integral do campo vectorial X ao longo do caminho indicado:

(a) $X(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, na curva $y = x^2$ entre $(-1,1)$ e $(1,1)$.

(b) $X(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, na curva $y = 1 - |1 - x|$ entre $(0,0)$ e $(2,0)$.

(c) $X(x,y) = (2a - y, x)$, no caminho $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $0 \le t \le 2\pi$.

(d) $X(x,y) = (x + y, x - y)$, na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ numa volta no sentido anti-horário.

(e) $X(x,y,z) = (2xy, x^2 + z^2, y)$, num segmento de recta entre $(1,0,2)$ e $(3,4,1)$.

(f) $X(x,y,z) = (x, y, xz - y)$, no caminho $\gamma(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$, $0 \le t \le 1$.

(2) Esboce o caminho $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 4\pi$, e calcule a sua massa se a densidade de massa ao longo da curva é dada por $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(3) Seja $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (y^2, 2xy + z, y + 5)$.

(a) Determine se F é o gradiente de uma função escalar $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

(b) Calcule $\int_\Gamma F \cdot d\gamma$ para o caminho $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ e a curva $\Gamma = \gamma([0,\pi])$.

(4) Calcule o centróide de $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$.

(5) Considere a superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ obtida como a intersecção entre o cilindro $x^2 + y^2 \le 2x$ com o cone $x^2 + y^2 = z^2$. Calcule $\int_M f$ onde $f(x,y,z) = x^4 - y^4 + y^2z^2 - x^2z^2 + 1$.

(6) * Seja $\varphi \colon M \to \mathbb{R}$ onde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = f(x,y),\ (x,y) \in V\}$ com $f \in C^1(V)$ e $V \subset \mathbb{R}^2$. Mostre que

$$\int_M \varphi = \int_V \varphi(x,y,f(x,y))\, \sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2}\, dx\, dy.$$