Análise Matemática III

LISTA 7

(1) Demonstre as seguintes proposições:
   (a) Qualquer intervalo é mensurável à Lebesgue.
   (b) Se A_k, $k \in \mathbb{N}$, são conjuntos mensuráveis à Lebesgue, então
   $$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$
   também é mensurável à Lebesgue.

(2) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o conjunto $A_\alpha = \alpha + \mathbb{Q}$.
   (a) Determine $\cup_{\alpha \in \mathbb{R}} A_\alpha$ e $m(A_\alpha)$.
   (b) Mostre que $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ sse $A_\alpha \neq A_\beta$ sse $\alpha - \beta \notin \mathbb{Q}$.
   (c) *Considere o conjunto E constituído por um único elemento a_α de cada A_α distinto[1]. Seja então $E_n = q_n + E$, $n \in \mathbb{N}$, onde q_n representa uma sucessão que ordena os racionais.
      (i) Determine $\cup_n E_n$, $m((\cup_n E_n) \cap [0,1])$ e $m(E_n) - m(E)$.
      (ii) Mostre que $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$.
      Sugestão: Suponha que existe $x \in E_i \cap E_j$.
      (iii) Calcule $\sum_n m(E_n \cap [0,1])$ e compare com $m((\cup_n E_n) \cap [0,1])$. Conclua que $E \cap [0,1]$ não é mensurável à Lebesgue, i.e. $E \cap [0,1] \notin \mathcal{M}$.

(3) Decida se $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de Ω onde:
   (a) $\mathcal{F} = \big\{\emptyset, \{0\}, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^-, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}\big\}$, $\Omega = \mathbb{R}$.
   (b) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \Omega\}$, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
   (c) $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

(4) Seja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ uma σ-álgebra. Mostre que $\emptyset \in \mathcal{F}$ e que se $A_k \in \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}$.

(5) (Medida de contagem) Considerando $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, mostre que a aplicação de contagem dos elementos de $A \in \mathcal{F}$:
$$\mu(A) = \begin{cases} \#A, & \#A < +\infty \\ +\infty, & \text{c.c,} \end{cases}$$
é uma medida.

(6) Seja $\mu \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ a aplicação dada por
$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\mathbb{R}) = 2, \quad \mu(X) = 1 \quad \text{se} \quad X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

[1] Este conjunto existe pela aplicação do axioma da escolha.

Mostre que μ é uma medida exterior sobre $\mathbb{R}$ e que os únicos conjuntos mensuráveis são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$.

(7) Seja μ uma medida. Encontre uma fórmula para $\mu(A \cup B \cup C)$ em termos das medidas de cada um dos conjuntos e das suas intersecções.