

Semana 10: Cap. 7 – Aproximações Polinomiais,
Teorema do Valor Intermédio e Teorema do Valor Médio

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Seja a função $f(x) = \ln x$.

- Obtenha a aproximação linear de f em torno do ponto $x = 1$.
- Obtenha a aproximação quadrática de f em torno do ponto $x = 1$.
- Esboce o gráfico de f e compare com os gráficos das funções obtidas nas alíneas anteriores.
- Estime o valor de $\ln(1,1)$.

1.2. A aproximação quadrática da função $f(x) = (x + 1)^5$ em torno de $x = 1$ é dada por:

- $f(x) \simeq 80x^2 - 80x + 32$
- $f(x) \simeq -80x^2 + 80x + 32$
- $f(x) \simeq -80x^2 - 80x - 32$
- $f(x) \simeq 80x^2 + 80x + 32$

1.3. Seja a função $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2$. A aproximação de Taylor de segunda ordem de f em torno de $x = 1$ é:

- $x - 1 + (x - 1)^2$
- $x - 1 - (x - 1)^2$
- $-(x - 1)^2$
- $(x - 1)^2$

1.4. Escreva a fórmula de Taylor de ordem n para $f(x) = e^x$, em torno de $x = 1$, apresentando o resto na forma de Lagrange. Calcule o limite do resto quando n tende para $+\infty$.

1.5. Mostre que a equação $xe^x = \frac{1}{2}$ tem uma única solução no intervalo aberto $(-1, 1)$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Utilize a aproximação linear para mostrar que, perto da origem, temos: $\sin x \simeq x$.

2.2. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) .

- Defina função crescente.
- Mostre que se $f'(x) \geq 0$ para $x \in (a, b)$, então f é crescente.

2.3. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável duas vezes em \mathbb{R} e seja o polinómio de segundo grau $p(x) = \alpha(x - a)^2 + \beta(x - a) + \gamma$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Determine os coeficientes α, β, γ que satisfazem as seguintes condições, para $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(a) = p(a) \\ f'(a) = p'(a) \\ f''(a) = p''(a) \end{cases} .$$

3 Problemas e Modelização

3.1. Estime o valor aproximado de $\sin(0,1)$, justificando a sua resposta. Estime o erro da aproximação que efectuou.

3.2. Seja f uma função definida implicitamente pela equação $[f(x)]^3 = x^3 f(x) + x + 1$. Sabendo que $f(0) = 1$, indique a aproximação linear a $f(x)$ em torno de $x = 0$.

3.3. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = e^{x-1}$.

a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem n da função f em torno de 1.

b) Obtenha a majoração do resto fazendo $x = \frac{1}{2}$ e $n = 3$.

3.4. Utilize a fórmula de Taylor para calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$.

3.5. Seja a função $f(x) = \sqrt{x}$. Determine a aproximação linear de f em torno do ponto $x = 1$ e utilize-a para obter um valor aproximado de $\sqrt{1,1}$.

4 Exercícios adicionais

4.1. Utilize a fórmula de Taylor para escrever o polinómio $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ como soma de potências de $(x + 2)$.

4.2. Seja $y = f(x)$ uma função definida implicitamente pela equação $xy - x^2 = 2y + x$. A aproximação linear de $f(x)$ em torno do ponto $(4, 10)$ é dada por:

a) $-5x + 3$ b) $-\frac{1}{2}(x - 24)$ c) $\frac{1}{3}(x + 25)$ d) $x + 3$

4.3. Seja $f(x) = (2x - a)^m$, com $m \in \mathbb{N}$. Mostre que a aproximação de Taylor de segunda ordem da função f em torno de 0 é:

$$(-a)^m + 2m(-a)^{m-1}x + 2m(m-1)(-a)^{m-2}x^2.$$

4.4. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 7.4: Exercícios 1 a 4, 7, 9 e 10

Secção 7.5: Exercícios 1, 2, 4 e 5

Secção 7.6: Exercícios 1, 2 e 4;

Secção 7.10: Exercícios 1 e 2;

Secção 8.4: Exercícios 6 e 7.