

Análise Matemática III

LISTA 8

- (1) (Conjunto de Cantor) Considere $A_0 = [0, 1]$. Divida-o em três partes iguais e retire o intervalo aberto do meio $I_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Obtemos assim $A_1 = I_0 \cup I_2$ onde $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_2 = [\frac{2}{3}, 1]$. Repita o processo para I_0 e I_1 , obtendo $A_2 = I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$ onde $I_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, etc. Continuando, temos uma sucessão de conjuntos A_n .

- (a) Prove que $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é não vazio.
(b) Prove que A tem medida nula.
(c) *Prove que A não é numerável.

Sugestão: Escreva $x \in [0, 1]$ na forma ternária

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k},$$

onde $a_k \in \{0, 1, 2\}$. Note que $x \in A$ sse $a_k \in \{0, 2\}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

- (d) **Considere a função de Cantor $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{2^N} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{2^{k+1}}$$

onde $x = \sum_k a_k/3^k$, $a_k \in \{0, 1, 2\}$, e $N = \inf\{k: a_k = 1\}$. Mostre que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, f é crescente, constante em cada subintervalo de $[0, 1] \setminus A$, contínua em $[0, 1]$, $f' = 0$ q.t.p., $f(1-x) = 1 - f(x)$ e $2f(x/3) = f(x)$.

- (2) Mostre que se $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, então $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$, e que $\sigma(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$.
- (3) Mostre que $\mathcal{A} = \{[a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$ gera a σ -álgebra de Borel em \mathbb{R} .
- (4) Seja $\Omega = \{0, 1\}^n \subset \mathbb{R}^n$, i.e. os elementos de Ω são vectores em \mathbb{R}^n com componentes 0 ou 1. Considere a medida $\mu: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ definida para cada $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ por $\mu(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n}$.

Dados $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1\}$ com $1 \leq m \leq n$, definimos

$$A_{a_1, \dots, a_m} = \{\omega \in \Omega: \omega_i = a_i, i = 1, \dots, m\}$$

e $\mathcal{A}_m = \{A_{a_1, \dots, a_m}: a_i \in \{0, 1\}\}$.

- (a) Mostre que μ é uma medida de probabilidade.
(b) Calcule $\mu(A_{a_1, \dots, a_m})$.
(c) Determine a σ -álgebra gerada por \mathcal{A}_2 .
(d) *Mostre que o cardinal da σ -álgebra gerada por \mathcal{A}_m é 2^{2^m} .