

Semana 11: Cap. 8 – Extremos e Concavidades

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 8.6: Exercício 4 e 5;

Secção 8.7: Exercício 5 e 6.

1.2. Seja a função $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 12$.

- Determine os pontos de estacionariedade da função f .
- Determine os extremos da função f estudando a sua segunda derivada.
- Indique se os extremos são locais ou globais.

1.3. Seja a função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sin(x^2)$, com $I = [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$.

- Determine os pontos de estacionariedade da função f .
- Determine os extremos da função f estudando a sua segunda derivada.
- Indique se os extremos são locais ou globais.

1.4. Sejam as funções $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ e $h(x) = x^3$.

- Determine os pontos de estacionariedade de cada uma destas funções.
- Através das derivadas de ordem 2 ou superior, determine se esses pontos correspondem a pontos de mínimo, de máximo ou de inflexão.
- Determine as concavidades de cada uma destas funções.

1.5. Um ponto de inflexão de uma função é sempre ponto de estacionariedade dessa função: verdadeiro ou falso? Justifique a resposta.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Indique a definição de função crescente e de função decrescente.

2.2. Indique a definição de ponto de estacionariedade de uma função real de variável real.

2.3. Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com segunda derivada continua em I , e a um ponto do interior de I .

- Indique a definição de ponto de inflexão de f .
- Prove que se a é um ponto de inflexão de f , então $f''(a) = 0$.

3 Problemas e Modelização

3.1. Um congelador avariado opera entre -3°C e $+2^{\circ}\text{C}$ e tem um consumo de energia que varia com a sua temperatura t segundo: $t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6t + 10$.

- Determine as temperaturas para as quais o consumo de energia é máximo e é mínimo.
- A função consumo de energia tem algum ponto de inflexão?

3.2. Seja a função: $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{se } x < -1 \\ |x| & \text{se } -1 \leq x \leq +1 \\ e^{-x+1} & \text{se } x > +1 \end{cases}$.

- Qual o domínio da função f ?
- Discuta a continuidade e a diferenciabilidade de f no seu domínio.
- Determine os pontos de estacionariedade da função f .
- Determine os extremos da função f , indicando se são locais ou globais.
- Determine os extremos da função f no intervalo $[-4, -1]$.

3.3. Considere a função $f(x) = x \sin x$.

- Calcule o polinómio de Taylor de segunda ordem de f em torno do ponto 0.
- A função f tem um único ponto de estacionariedade no intervalo aberto $] -1; 1[$. Determine-o.
- Classifique o ponto de estacionariedade obtido na alínea anterior através do estudo da segunda derivada.
- Existem outros pontos de extremo de f no intervalo $] -1; 1[$? Justifique a resposta.

4 Exercícios adicionais

4.1. Seja a função f e o intervalo I do exercício 1.3. Mostre que f tem pelo menos dois pontos de inflexão no intervalo I .

4.2. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que: $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$. Prove que a é um ponto de máximo local de f .

4.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 8.6: Exercícios 1, 3 e 6;

Secção 8.7: Exercícios 2 a 4.