

Semana 13: Cap. 9 – Integrais e Áreas (Parte II)

Nota: os exercícios 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 2.1, 2.3 e 2.4 serão corrigidos nas aulas teóricas.

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Estude a convergência dos seguintes integrais impróprios, e calcule-os sempre que possível:

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$ c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ d) $\int_{-\infty}^{+\infty} u^3 du$ e) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx$.

1.2. Calcule, utilizando a primitivação por partes, as seguintes primitivas:

a) $\int x e^x dx$ b) $\int x^2 \ln x dx$ c) $\int t \sin t dt$ d) $\int x^2 \sin x dx$ e) $\int e^x \cos x dx$.

1.3. Calcule, utilizando a primitivação por substituição, as seguintes primitivas:

a) $\int 2x \sin(x^2) dx$ b) $\int e^{x^2} x dx$ c) $\int \frac{x^4}{x^5 + 7} dx$ d) $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$ e) $\int \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} dx$.

1.4. Calcule: a) $\frac{d}{dt} \int_4^t e^{-x^2} dx$ b) $\frac{d}{dx} \int_x^\alpha \frac{1}{\sqrt{s^4 + 1}} ds$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.5. Calcule a área dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^2 :

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 5 \wedge y \geq -5x + 5 \wedge y \geq \ln x\}$
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq e^x \wedge x \leq 1\}$
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq -x^2 + 2\}$.

1.6. Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_0^{\sin t} x^3 dx$ b) $\int_1^e \ln x dx$ c) $\int_0^1 t e^{-t^2} dt$ d) $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx$ e) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$
f) $\int_0^1 \sqrt{3x + 7} dx$ g) $\int_{-3}^4 |x - 2| dx$ h) $\int_0^1 3e^{5x+1} dx$ i) $\int_0^{\pi} 2xt^3 \cos t^4 dt$ j) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

2 Problemas

2.1. Calcule as seguintes áreas através de integrais:

a) Calcule a área que fica acima do gráfico da função $f(x) = x^2 - 4$ e abaixo do eixo das abcissas.

b) Calcule a área entre os gráficos das funções $f(x) = x^2 + x + 1$ e $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$, para $x \in [-3, 0]$.

2.2. Determine o domínio, os intervalos de monotonia e os extremos locais das funções:

a) $F(x) = \int_1^x \ln t dt$ b) $H(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt.$

2.3. Considere a função $f(x) = \int_{\pi}^{x^2} e^{-2t} dt.$ Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 de f em torno de $x = 0.$

2.4. Considere a função $F(x) = \int_0^x t f(t) dt,$ onde f é uma função contínua e estritamente positiva em $\mathbb{R}.$ Prove que $x = 0$ é um minimizante local da função $F(x).$

2.5. Considere a função $f(x) = \begin{cases} a - x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{b+x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$ com $b > 0.$

a) Determine os valores de a e de b para os quais a função f é contínua.

b) Faça $a = b = 1$ e considere a função definida por $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt.$ Calcule $F(1).$ Em seguida, mostre que a função F admite inversa no intervalo $(0, +\infty).$

2.6. Seja a função $f(x) = \int_1^{x^2+1} \left(\frac{1+t}{t} \right) dt.$

a) Calcule $f(-1).$

b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = -1.$

2.7. Considere a função com domínio $D_f:$ $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1 & \text{se } x < 0 \\ e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$

a) Para que valores de $x \in D_f$ a função f é diferenciável? Escreva a expressão da função derivada $f'(x).$

b) Determine $G(x) = \int_{-1}^x f(t) dt,$ definida em $[-1, \infty).$

2.8. Determine a função $f,$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R},$ que verifica: $f''(x) = 2 \cos x + x e^x,$ $f'(0) = 2, f(0) = 1$

2.9. Sem utilizar a primitivação, calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(t^2 + 1) dt}{x^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos t dt}{x^2}.$

3 Exercícios adicionais

3.1. Determine uma primitiva das seguintes funções, nos respectivos domínios:

a) $x^2 e^x$ b) $x \sqrt{x+1}$ c) $x^3 \sqrt{1+x^2}$ d) $2x \cos x$ e) $\sin^2 x$
f) $\ln(2x-1)$ g) $x^2 \ln x$ h) $\arctan x$ i) $\ln^2 x$ j) $e^x \cos x.$

3.2. Determine, por substituição, uma primitiva das seguintes funções:

a) $\frac{x}{1+x^2}$

b) $\sqrt{1-\sin^2 x}$

c) $\frac{e^{\frac{x}{10}}}{1+e^{\frac{x}{10}}}$, com $x = 20 \ln t$ ($t > 0$)

d) $\frac{\cos x}{\sin^6 x}$, com $x = \arcsin t$.

3.3. Estude a convergência dos integrais impróprios e calcule-os quando tal for possível:

a) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

b) $\int_0^{+\infty} \cos x dx$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx$

e) $\int_0^3 \frac{1}{x-3} dx$

f) $\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

3.4. Calcule a área que fica acima do gráfico da função $f(x) = \ln x$, para $x \in [0, 1]$, e abaixo da recta $y = 0$.

3.5. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 9.3: Exercícios 4 a 6;

Secção 9.5: Exercícios 2 e 3;

Secção 9.6: Exercício 3;

Secção 9.7: Exercícios 1, 4 e 12.