Análise Matemática III

LISTA 10

(1) Demonstre as seguintes proposições para $f, g \in L^1(E, \mu)$:
   (a) Se $f \leq g$ q.t.p., então $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$.
   (b) Se $A \subset E$ com A mensurável, então $\int_A |f|\, d\mu \leq \int_E |f|\, d\mu$.
   (c) Se $\mu(A) = 0$, então $\int_A f\, d\mu = 0$.
   (d) Se A, B são mensuráveis e disjuntos, então $\int_{A\cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu$.
   (e) Se $f = 0$ q.t.p., então $\int_E f\, d\mu = 0$.

(2) Mostre que se $f, g \in L^1(E, \mu)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha f + \beta g \in L^1(E, \mu)$ e

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu.$$

(3) Mostre que se $f \geq 0$ é mensurável, então $\mu(A) = \int_A f\, dm$ define uma medida.

(4) Calcule:
   (a) $\lim \int_0^{+\infty} \frac{r^n}{1+r^{n+2}} dr$
   (b) $\lim \int_0^{\pi} \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2}\, dx$
   (c) $\lim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos^n(x)\, dx$
   (d) $\lim \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)^n} dx\, dy$
   (e) $\lim \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1+\cos^n(x-y)}{(x^2+y^2+1)^2}\, dx\, dy$

(5) Mostre que para $x > 0$ temos

$$\log x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt.$$