

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2008/2009

EXAME FINAL 15 Janeiro 2009

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Considere os conjuntos

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + \log(z/x) - \log(z/y) = 0, x, y, z > 0\},$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = z\}.$$

- (a) Mostre que M , N e $M \cap N$ são variedades diferenciais e determine as suas dimensões.
- (b) Escreva os espaços tangente e normal de $M \cap N$ num ponto qualquer $p \in M \cap N$.

(2) Calcule:

(a) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(b) o integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

(c) o ponto sobre a superfície esférica de centro $(2, 3, 4)$ e raio 1, mais próximo da origem.

(3) Considere a curva em \mathbb{R}^2 dada por

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 9x^2 + 4y^2 = 36\}.$$

(a) Calcule o integral em Γ da função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por
 $f(x, y) = \sqrt{81x^2 + 16y^2}$.

(b) Seja

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in \Gamma, z \in [0, 1]\}.$$

Determine o fluxo de $g(x, y, z) = (0, 0, 1)$ através de M .

(4) Considere o conjunto $\Omega = [0, 1]$ e o subconjunto das partes de Ω dado por $\mathcal{A} = \{\{0\}, \{1\}\}$. Indique a σ -álgebra \mathcal{F} gerada por \mathcal{A} . Decida se

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \text{ ou } 1 \in A \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad A \in \mathcal{F},$$

é uma medida de probabilidade.

(5) (a) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/n} dt.$$

(b) Mostre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sugestão: Recorde que $1/(1 - y) = \sum_{n \geq 0} y^n$ com $|y| < 1$.
 Use o teorema de Beppo-Levi.

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2008/2009

EXAME FINAL 30 Janeiro 2009

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y).$$

- (a) Mostre pelo teorema da função implícita que numa vizinhança de $(1, 1, 0)$ o conjunto $F^{-1}(\{(2, 0)\})$ é o gráfico de uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo aberto de \mathbb{R} .
- (b) Encontre uma parametrização de $F^{-1}(\{(2, 0)\})$ numa vizinhança U de $(1, 1, 0)$.

(2) Considere o caminho $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

Calcule:

- (a) o comprimento da curva $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.
- (b) o integral do campo vectorial $f(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, 1)$ ao longo de γ .

(3) Decomponha a unidade num produto de três números positivos cuja soma seja mínima.

(4) Considere a superfície

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, \frac{\pi}{2} < z < \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

- (a) Escreva uma representação paramétrica de M e determine o integral de $f(x, y, z) = (x + y) \sin z$ em M .
- (b) Calcule o fluxo do campo vectorial $g(x, y, z) = (xz^2, yz^2, z^3)$ através de M segundo a normal unitária com terceira componente negativa.

(5) Seja

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{N}^2 : \omega_1, \omega_2 \in \{0, \dots, 9\}\}$$

e $A_i = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = i\}$ para $i \in \{0, \dots, 9\}$. Determine a σ -álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$. Nestas condições, construa uma medida de probabilidade.

(6) Calcule:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \sin^n(x+y) dx dy.$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \left[\frac{2n^2}{n^2 + x^2} + f(x^n) \right] dx,$$

onde $f \in C^0([0, 1])$.

Análise Matemática III – 2º ano MAEG
1º Semestre 2009/2010

EXAME FINAL 6 Janeiro 2010

Duração máxima: 2 horas
Cada alínea vale 2 valores
Sem consulta, sem calculadora

(1) Considere o conjunto

$$M = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : ad - bc = 1\}$$

e a função $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

- (a) Mostre que M é uma variedade diferencial e determine a sua dimensão.
- (b) Determine os espaços tangente e normal a M no ponto $(1, 0, 0, 1)$.
- (c) Prove que $\varphi \geq 2$ em M .

Sugestão: Encontre o mínimo de φ em M .

(2) Calcule:

(a) os pontos de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2, 2x + z = 2\}$$

mais próximos e mais distantes da origem.

(b) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(c) o integral

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} e^{-y/x} \frac{y}{x} dx dy.$$

Sugestão: Use o teorema de Fubini.

(d) o integral

$$\int_V \operatorname{div} f$$

onde $f(x, y, z) = (-y \sin^2(x + y), x \sin^2(x + y), z)$ e

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x - y < 1, 0 < x + y < 1, 0 < z < 1\}.$$

(3) Seja

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{N}^2 : \omega_1, \omega_2 \in \{0, \dots, 9\}\}$$

e $A_i = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = i\}$ para $i \in \{0, \dots, 9\}$.

(a) Determine a σ -álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$ denotada por $\sigma(\mathcal{A})$.

(b) Considere a aplicação $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(A) = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

onde $\#B$ indica o número de elementos de um qualquer conjunto B . Mostre que μ é uma medida de probabilidade.

(4) Dado $q \in]0, 1[$, mostre que a função μ definida em subconjuntos A de \mathbb{N} por

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} (1 - q)q^{n-1},$$

define uma medida de probabilidade em \mathbb{N} .

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2009/2010

EXAME FINAL 27 Janeiro 2010

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ considere o conjunto

$$M_\theta = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : ad - bc = \theta, a + d = 0\}$$

e a função $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

- (a) Determine para que valores de θ o conjunto M_θ é uma variedade diferencial e qual a sua dimensão.
- (b) Determine os espaços tangente e normal a M_θ no ponto $(0, -\theta, 1, 0)$ com $\theta \neq 0$.
- (c) Prove que $\varphi \geq 2|\theta|$ em M_θ com $\theta < 0$.

(2) Considere o caminho $\gamma: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t, \sin t, t)$$

e o campo vectorial

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{2x}{(x^2 - y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2 - y^2)^2}, z^2 \right).$$

- (a) Mostre que f é o gradiente de uma função escalar.
- (b) Calcule o integral do campo vectorial f ao longo de γ .

(3) Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, x^2 - 1 < y < x^2, x^3 < z < x^3 + 2\}.$$

(a) Decida se $h(x, y, z) = (x, y - x^2, z - x^3)$ é uma mudança de coordenadas em S e determine $h(S)$.

Sugestão: Recorde que h é uma mudança de coordenadas sse é C^1 , injectiva e $\det Dh(x, y, z) \neq 0$.

(b) Indique o valor de

$$\int_S \frac{z - x^3}{1 + x^2} dx dy dz.$$

(4) Seja $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável e E um conjunto mensurável tal que $m(E) < +\infty$. Considere a função $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\omega(x) = m(\{y \in E : f(y) > x\}).$$

(a) Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \omega(x)$ e a monotonia de ω .

(b) Qual a condição para que ω seja contínua num ponto $a \in \mathbb{R}$.

(5) Dado $\lambda > 0$, mostre que a função μ definida em subconjuntos A de \mathbb{N} por

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!},$$

define uma medida de probabilidade em \mathbb{N} .