Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciatura MAEG

Processos Estocásticos e Aplicações
(Exame com consulta limitada ao formulário; Duração: 2h)
12 de Janeiro de 2011

1. Uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ com estados 0, 1 e 2, tem matriz de probabilidades de transição
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
Se $P\{X_0 = 0\} = P\{X_0 = 1\} = \frac{1}{4}$, determine $E[X_3]$. [10]

2. Uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ com espaço dos estados $S = \{1, 2, ..., 7\}$ tem matriz de probabilidades de transição
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   (a) Indique a partição de S induzida pela relação de comunicação entre estados. Classifique os estados da cadeia, bem como as classes de estados induzidas pela relação de comunicação. [10]
   (b) Determine, justificando, o período do estado 1. [10]
   (c) Identifique o vector de probabilidades de absorção associado a cada uma das classes fechadas. [20]
   (d) Suponha que $X_0 = 2$. Determine a distribuição limite, justificando. [20]

3. Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de Poisson de intensidade λ. Designe por S_n o tempo de ocorrência do n-ésimo acontecimento. Determine, justificando
   (a) $E[S_4]$, [10]
   (b) $E[S_4|N(1) = 2]$, [10]
   (c) $E[N(4) - N(2)|N(1) = 3]$. [10]

4. Suponha que $S(t)$ designa o preço de um activo no período t . Um modelo popular para o processo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ supõe que o preço permanece inalterado até à ocorrência de um choque, momento em que o preço é multiplicado por um factor aleactório. Seja $N(t)$ o número de choque ocorridos até t e considere que X_i designa o i-ésimo factor multiplicativo, de modo que

$$S(t) = S(0)\Pi_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

com $\Pi_{i=1}^{N(t)} X_i = 1$ se $N(t) = 0$. Considere que $\{X_i\}_{i=1,2,\ldots}$ são variáveis aleatórias independentes, exponencialmente distribuídas com média μ e que $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ é um processo de Poisson de intensidade λ, independente de $\{X_i\}_{i=1,2,\ldots}$. Seja $S(0) = s$.

   (a) Determine $E[S(t)]$. [10]

   (b) Determine $E[S^2(t)]$ e $V[S(t)]$. [20]

5. Suponha que cada indivíduo de uma população morre passado um tempo exponencial de parâmetro μ. Cada indivíduo vivo, passado um tempo exponencial de média $1/\lambda$ origina um novo indivíduo. Adicionalmente existe uma intensidade exponencial de crescimento com parâmetro θ, devido a imigração. Considere que a imigração não é permitida quando o tamanho da população é superior ou igual a N.

   (a) Identifique as taxas de nascimento e morte do processo. [20]

   (b) Se $N = 3$, $\lambda = \theta = 1$ e $\mu = 2$, determine a proporção do tempo em que a imigração está proibida. [30]

6. Sejam $\{W_n\}_{n=1,2,\ldots}$ os instantes de ocorrência dos acontecimentos num processo de Poisson com $\lambda = 1$. Prove que o processo $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$, com $X_n = 2^n \exp(-W_n)$, é uma Martingala relativamente a $\{W_n\}_{n=1,2,\ldots}$ [20]