Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciatura MAEG

Processos Estocásticos e Aplicações
(Exame com consulta limitada ao formulário; Duração: 2h)
12 de Janeiro de 2009

Tópicos de Solução

1. $S = \{0, 1, 2\}$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 13/32 & 9/64 & 29/64 \\ 15/32 & 7/64 & 27/64 \\ 7/16 & 5/32 & 13/32 \end{bmatrix}$$

$[\Pr\{X_3 = 0\},\ \Pr\{X_3 = 1\},\ \Pr\{X_3 = 2\}] = [0.25, 0.25, 0.5]P^3 = [14/32,\ 9/64,\ 27/64]$
$E[X_3] = \sum_{j=0}^{2} j \Pr\{X_3 = j\} = 63/64.$

2. (a) A partição de S induzida pela relação de comunicação entre estados é $\{\{1, 3, 6\}, \{2\}, \{4\}, \{5, 7\}\}$.
$\{1, 3, 6\}$ e $\{4\}$ são classes fechadas de estados recorrentes positivos; o estado 4 é absorvente;
$\{2\}$ e $\{5, 7\}$ são classes abertas de estados transientes.

(b) $d(1) = 1$.

(c) Seja $u_k = \Pr\{$ absorção na classe $\{4\} |\ X_0 = k\}$, $k = 1, 2, ..., 7$.
$u_1 = u_3 = u_6 = 0$ e $u_4 = 1$; *Os* restantes são a solução do sistema

$$\begin{cases} u_2 = \frac{1}{4} u_5 \\ u_5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} u_5 + \frac{1}{2} u_7 \\ u_7 = u_5 \end{cases}$$

que é $u_5 = u_7 = 1/2$, $u_2 = 1/8$. Assim o vector de probabilidades de absorção na classe $\{4\}$ é $[0,\ 1/8,\ 0,\ 1,\ 1/2,\ 0,\ 1/2]$.
O vector de probabilidades de absorção na classe $\{1, 3, 6\}$ é 1 menos o anterior, ou seja $[1,\ 7/8,\ 1,\ 0,\ 1/2,\ 1,\ 1/2]$.

(d) Se $X_0 = 2$, a cadeia é absorvida na classe $\{4\}$ com probabilidade $1/8$ e na classe $\{1, 3, 6\}$ com probabilidade $7/8$, conforme se viu na alínea anterior. A distribuição estacionária associada à classe $\{1, 3, 6\}$ é a distribuição limite desta classe, uma vez atingida, pois esta classe é fechada e aperiódica. Esta distribuição é $[1/3, 1/3, 1/3]$, conforme se pode calcular facilmente. Então a distribuição limite é

$$\frac{7}{8} \times \left[\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0\right] + \frac{1}{8} \times [0, 0, 0, 1, 0, 0] = \left[\frac{7}{24}, 0, \frac{7}{24}, \frac{3}{24}, 0, \frac{7}{24}, 0\right].$$

3. (a) $E[S_4] = \frac{4}{\lambda}$.

(b) $E[S_4|N(1)=2] = 1+\frac{2}{\lambda}$.

(c) $E[N(4)-N(2)|N(1)=3] \underset{\text{inc ind}}{=} E[N(4)-N(2)] \underset{\text{inc est}}{=} E[N(2)] = 2\lambda$.

4. (a)

$$
\begin{aligned}
E[S(t)] &= sE\left[\Pi_{i=1}^{N(t)} X_i\right] = sE\left[E\left[\Pi_{i=1}^{N(t)} X_i|N(t)\right]\right] = \\
&= sE\left[\mu^{N(t)}\right] = s\exp[\lambda t(\mu-1)]
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
E[S^2(t)] &= s^2E\left[\Pi_{i=1}^{N(t)} X_i^2\right] = s^2E\left[E\left[\Pi_{i=1}^{N(t)} X_i^2|N(t)\right]\right] = \\
&= s^2E\left[\left(2\mu^2\right)^{N(t)}\right] = s^2\exp[\lambda t(2\mu^2-1)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var[S(t)] &= E[S^2(t)] - E^2[S(t)] = \\
&= s^2\exp[\lambda t(2\mu^2-1)] - s^2\exp[2\lambda t(\mu-1)].
\end{aligned}
$$

5. (a) $\lambda_n = \begin{cases} \theta + n\lambda \text{ se } 0 \le n < N \\ n\lambda \text{ se } n \ge N \end{cases}$; $\mu_n = n\mu$, $n = 1,2,...$

(b) $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = 1/4$; $\theta_3 = 1/8$; $\theta_j = \frac{1\times2\times3\times[3\times\ldots\times(j-1)]}{2^j j!} = \frac{3}{2^j j}$, $j > 3$.

$\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+3\sum_{j=3}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)+3\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j} = -\frac{1}{8}-3\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 3\ln(2)-\frac{1}{8}$

$\pi_0 = \left(3\ln(2)-\frac{1}{8}\right)^{-1} = 0.511\,66$

$\pi_1 = \theta_1\pi_0 = \frac{0.511\,66}{2} = 0.255\,83$

$\pi_2 = \theta_2\pi_0 = \frac{0.511\,66}{4} = 0.127\,92$

A proporção de tempo em que a imigração está proíbida é $1-\pi_0-\pi_1-\pi_2 = 0.104604$.

6. W_n tem distribuição Gama $(n,1)$. $E[|X_n|] = 2^nE(\exp(-W_n)) = 2^n \times M_{W_n}(-1) = 2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 < +\infty$. Além disso

$E[X_{n+1}|X_0,X_1,...,X_n] = \cancel{X}_nE[2\exp(-S_n)]$, onde S_n é o tempo decorrido no estado n, o qual tem distribuição exponencial de média 1 e portanto $E[2\exp(-S_n)] = 2M_{S_n}(-1) = 1$, o que implica que $E[X_{n+1}|X_0,X_1,...,X_n] = X_n$.