Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2010/2011

EXAME ÉPOCA NORMAL 5 Janeiro 2011

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todos os cálculos

(1) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ considere o conjunto

$$M_\theta = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \colon ad - bc = \theta,\ a + d = 0\right\}$$

e a função $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

(a) Determine para que valores de θ o conjunto M_θ é uma variedade diferencial e qual a sua dimensão.

(b) Determine os espaços tangente e normal a M_θ no ponto $(0, -\theta, 1, 0)$ com $\theta \neq 0$.

(c) Prove que $\varphi \geq 2\,|\theta|$ em M_θ com $\theta < 0$.

(2) Calcule:

(a) a massa do sólido

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\right\}$$

sabendo que a densidade de massa é dada por

$$\rho(x,y,z) = e^{-x^2-y^2}.$$

(b) o centróide de

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x,y,z \geq 0\}.$$

(c) o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x^2+y^2)^{n/2}}{1 + (x^2+y^2)^{(n+3)/2}}\, dx\, dy.$$

(3) Calcule, para o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + y < 1, 0 < y < x\},$$

o valor de

$$\int_A (x^2 - y^2) e^{-(x+y)^4} \, dx \, dy.$$

(4) Seja $\alpha > 0$. Considere a superfície

$$S_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \alpha(x^2 + y^2), 1 < x^2 + y^2 < 2\}$$

e a normal unitária ν a S_α com terceira componente negativa. Determine o fluxo de $F(x, y, z) = (y^3, x^3, (z-\alpha)(z-2\alpha))$ através de S_α segundo ν.

(5) Seja Ω um conjunto finito e não vazio. Considere a σ-álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$ contendo todos os subconjuntos de Ω. Seja $p \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $p(\omega) \geq 0$ para qualquer $\omega \in \Omega$, e

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

(a) Mostre que

$$\mu(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \qquad A \subset \Omega$$

define uma medida de probabilidade em $\mathcal{P}(\Omega)$.

(b) Para $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ e $p(\omega) = \frac{1}{4}$, calcule $\int_\Omega \varphi \, d\mu$ onde $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(\omega_1, \omega_2) = 1$ se $\omega_1 = 0$ e $\varphi(\omega_1, \omega_2) = 0$ caso contrário.