INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL
Matemática 1, 2010/2011 - 1º Semestre
Exame em Época Normal, 4 de Janeiro de 2011 Duração: 2 horas

Nome: ____________________

Nº de Aluno: ________ Curso: ______________ Classificação: ________

Parte I

Pergunta	1	2	3	4	Total
Cotação	1.5	1.5	1.5	1.5	6.0
Class.					

Parte II

Pergunta	1a	1b	2	3	4	5a	5b	5c	5d	5e	5f	5g	6	7	Total
Cotação	2.5	0.5	0.5	0.5	1.5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	1.5	1.0	14.0
Class.															

PARTE I: Perguntas de escolha múltipla (6 valores)

Cada resposta correcta vale 1,5 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0,5 valores.

A cotação mínima na primeira parte é de zero valores.

1. A distância entre $\vec{u} = (-1, 1, k, 0)$ e $\vec{v} = (2, 0, 0, -7)$ é mínima para:

☐ $k = 1$ ☐ $k = 0$

☐ $k \in \mathbb{R}$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

2. Seja $x \in \mathbb{R}$. A série $\sum_{n=0}^{+\infty} 7(\cos x)^n$ é convergente se:

☐ $x \in \mathbb{R}$ ☐ $x \neq 0 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x \in [-\pi; \pi]$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

3. O valor de $\lim_{x \to 0^+} x^{5x}$ é:

☐ 0 ☐ 1

☐ 5 ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

4. O valor do determinante $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, em que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ é:

☐ $\alpha^2\beta^2\gamma$ ☐ $-\alpha^2\beta^2\gamma$

☐ 0 ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

PARTE II: Perguntas de desenvolvimento (14 valores)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja o sistema de equações: $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y + \alpha z = 3 \\ -2x - 3y + z = \beta \end{cases}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Classifique este sistema em função dos valores de α e β, indicando, nos casos adequados, o número de graus de liberdade.

(b) Resolva este sistema para $\alpha = 2$ e $\beta = 3$.

2. Defina característica de uma matriz.

3. Sejam os vectores $\vec{a} = (0, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, x, 0)$, e $\vec{c} = (0, 0, y)$, onde $x, y \in \mathbb{R}$. Determine para que valores de x e y os vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ são linearmente independentes.

4. Seja A uma matriz invertível. Demonstre que $(A^{-1})^{-1} = A$.

5. Seja a função $f(x) = xe^x + 3$.

(a) Indique o domínio de f e discuta a sua continuidade.

(b) Determine o(s) ponto(s) de estacionariedade de f.

(c) Determine o(s) ponto(s) de extremo de f através do estudo da sua segunda derivada.

(d) Discuta se o, ou os, pontos de extremo obtidos anteriormente são globais.

(e) Calcule a aproximação quadrática de f em torno de $x = 0$.

(f) Determine em que intervalos a função f é invertível.

(g) Seja g a inversa da função f num intervalo adequado. Determine o valor da derivada da função g no ponto 3.

6. Considere as funções $f(x) = -e^{-x}$ e $g(x) = e^{-x}$. Determine a área compreendida entre os gráficos das funções f e g, com $x \in (0, +\infty)$.

7. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável no seu domínio e $p \in \mathbb{R}$. Demonstre que $El_x [f(x)^p] = pEl_x [f(x)]$.