

Semanas 1 e 2: Cap. 1 – Vectores

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Sejam os vectores de \mathbb{R}^2 : $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (-1, 1)$. Represente estes vectores no plano e determine geometricamente: a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$ c) $-\vec{u} + 3\vec{v}$ d) $\|\vec{u}\|$ e) $d(\vec{u}, \vec{v})$.

1.2. Resolva analiticamente as alíneas do exercício anterior e compare com os resultados obtidos geometricamente.

1.3. Considere os seguintes vectores de \mathbb{R}^3 : $\vec{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\vec{v} = (1, 1, 3)$ e $\vec{w} = (2, 1, 0)$. Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo a obter o vector \vec{u} como combinação linear dos vectores \vec{v} e \vec{w} .

1.4. Os vectores $\vec{u} = (-1, -1, -a, -1)$ e $\vec{v} = (a + 2, a, a, a)$, com $a \in \mathbb{R}$, são ortogonais se e só se:

- a) $a = 2$ b) $a = 0$ c) $a = -2$ ou $a = -1$ d) $a = 1$.

1.5. Calcule a distância $d(\vec{u}, \vec{v})$ para os vectores do exercício 1.4 (com $a \in \mathbb{R}$).

2 Definições e Demonstrações

2.1. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, demonstre as seguintes propriedades do produto escalar:

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
b) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

2.2. Indique a distância $d(\vec{u}, \vec{v})$ entre dois vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

2.3. Demonstre que $\|\vec{u}\| > 0$ para qualquer $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

2.4. Defina combinação linear de vectores.

2.5. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Mostre que os vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$ formam igualmente um conjunto de vectores linearmente independentes.

3 Problemas e Modelização

3.1. Imagine os seguintes índices económicos, sem unidades:

País	Produtividade	Competitividade	Crescimento económico
Portugal	3	2	-1
Canadá	8	5	0
Tailândia	1	1	-3

- a) Qual o país mais próximo de Portugal no conjunto destes três índices?
b) Neste modelo, o conjunto dos índices portugueses depende linearmente dos índices dos outros dois países?

3.2. Tendo em conta as seguintes notas e os respectivos pesos:

Disciplina	Peso	Notas do João	Notas da Leonor
Matemática	3/10	?	15
Contabilidade	3/10	18	12
Direito	3/10	10	14
Inglês	1/10	16	15

- a) Calcule a nota média destes alunos utilizando o produto escalar de vectores.
b) Qual a nota que o João precisa de obter a Matemática para igualar a média da Leonor?

4 Exercícios adicionais

4.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 15.7: Exercícios 1 a 8;

Secção 15.8: Exercícios 1 a 6.

4.2. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, demonstre a desigualdade triangular: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
(Sugestão: desenvolva $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ e utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz.)