Matemática I – 2º Semestre 2010/11
Ficha de exercícios

Semana 7: Cap. 5 – Funções Reais, e Cap. 6 – Variações

NOTA: Nesta ficha usa-se indiferentemente as seguintes notações: $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$.

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 6.5: Exercícios 1 e 4.

1.2. Esboce o gráfico das seguintes funções, indicando em cada caso um ou dois pontos particulares:
a) $-x^2$ b) $-\sqrt{x}$ c) e^x d) $\ln x$ e) $\dfrac{1}{x}$ f) $\sin x$ g) $\cos x$ h) $\tan x$
i) $ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ j) $|x + 5|$ k) $\ln(x - 5)$ ℓ) uma função ímpar.

1.3. Calcule a derivada em ordem a x das funções das alíneas *a)* a *i)* do exercício 1.2.

1.4. Para que valores reais de a e b a função $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{se } x \leq 1 \\ b - 2x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é contínua?

1.5. Seja $f(x) = e^x$, $g(x) = x^n$ com $n \in \mathbb{Z}$, e $h(x) = \sin x$. Calcule:

a) $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x) + h(x)]$ *b)* $\dfrac{d}{dx}[5f(x) + 2g(x)]$ *c)* $\dfrac{d}{dx}[g(x)h(x)]$
d) $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)]$ *e)* $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{h(x)}{f(x)}\right]$ *f)* $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}\right]$.

1.6. Seja $f(x) = \sqrt{x}$.
a) Indique o domínio de f e discuta a continuidade e a diferenciabilidade de f.
b) Calcule: $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ e $\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Demonstre, pela definição, que: $\lim\limits_{x\to 2} 3x + 1 = 7$.

2.2. Sejam as funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Demonstre que se f e g forem contínuas em $a \in \mathbb{R}$, então a função $(f + g)$ também é contínua em a.

2.3. Seja $f(x) = x^2$. Demonstre, pela definição, que: $\dfrac{df(x)}{dx} = 2x$.

2.4. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Mostre que $\dfrac{f(a) - f(x)}{a - x} = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, com $h = a - x$.

2.5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e $k \in \mathbb{R}$. Mostre que:
a) $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \dfrac{df(x)}{dx} + \dfrac{dg(x)}{dx}$.
b) $\dfrac{d}{dx}[kf(x)] = k\dfrac{df(x)}{dx}$.

3 Problemas e Modelização

3.1. O preço das acções das seguintes empresas é dado em função do tempo t por:

- Empresa A: $2t^2 + 4t$
- Empresa B: $3t^2 + t$
- Empresa C: $\frac{2t}{t^2+1}$.

a) No instante $t = 1$ qual a empresa cujo preço das acções está a crescer mais depressa?
b) Qual o período durante o qual o preço das acções da empresa C está a crescer?

3.2. Estude o domínio, a continuidade e a diferenciabilidade das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \ln\left(1 + x^2\right) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

3.3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Resolva a seguinte equação: $\dfrac{df(x)}{dx} = f(x)$.

3.4. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 7.8: Exercício 4;
Secção 6.7: Exercício 8;
Secção 6.9: Exercícios 9 e 10.

4 Exercícios adicionais

4.1. Determine o domínio das seguintes funções.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ c) $h(x) = \ln(3 - 2x)$

d) $i(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ e) $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ f) $k(x) = \ln(\ln x)$

g) $l(x) = \dfrac{1}{\ln\left(1 - |x - 1|\right)}$ h) $m(x) = \dfrac{\ln(4 - x^2)}{\sqrt{e^x - 1}}$.

4.2. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Resolva a seguinte equação: $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} = -f(x)$.

4.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 7.8: Exercícios 2, 3 e 5;
Secção 7.9: Exercícios 1 a 3;
Secção 6.5: Exercício 5;
Secção 6.7: Exercícios 6 e 7;
Secção 6.9: Exercícios 1, 3 e 7.