Matemática I – 2º Semestre 2010/11
Ficha de exercícios

Semana 8: Cap. 6 – Diferenciais, Funções Compostas, R. de l'Hôpital

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Seja $f(x) = e^x$, $g(x) = \sqrt{x}$, e $h(x) = \sin x$. Determine o domínio e contra-domínio das seguintes funções:

a) $f \circ g$ b) $f \circ h$ c) $h \circ f$ d) $h \circ f \circ g$ e) $f \circ h \circ f \circ g$

1.2. Calcule o diferencial das seguintes funções em ordem à respectiva variável:

a) $x^5 + 2x^4 + 1$ b) $-\sqrt{u}$ c) e^y d) $\ln z$ e) $\dfrac{1}{x}$ f) $\sin u$ g) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1.3. Derive as seguintes funções em ordem a x:

a) $\left(5x^{70} + 3x + 1\right)^2$ b) $\left(5x^2 + 3x + 1\right)^{70}$ c) $\cos\left(3x^5 - x\right)$ d) $e^{-\frac{x}{2}}$

e) $\sqrt{x-3}$ f) $\frac{1}{\ln x}$ g) $e^{\sin x}$ h) $x + \sqrt{x^2 - 1}$

i) $\ln(\sin x)$ j) $\ln\left(x^2 + 1\right)$ k) $\ln^4\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$ ℓ) $e^{-\cos\left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right)}$

1.4. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x}$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin x} - e^{\cos x}}{\sin x - \cos x}$ c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^2}{e^{2x-1} - 4x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ e) $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{-x^2}$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

2 Problemas e Modelização

2.1. Três empresas de moldes plásticos têm os seguintes custos de produção, que dependem directamente do preço p do petróleo:

- Empresa 1: $5p^3 + 2p + 1$
- Empresa 2: $2p^{3/2} + p$
- Empresa 3: $\sqrt{p} + \frac{1}{p}$.

a) Determine para cada empresa a taxa de variação média do custo de produção dada uma variação do preço do petróleo de 1 €/ℓ para 4 €/ℓ.
b) Determine para cada empresa a taxa de variação instantânea do custo de produção quando o preço do petróleo é de 1 €/ℓ.
c) Sabendo que durante um breve período de crise $t \in [0; 2]$ o preço do petróleo em função do tempo foi: $p(t) = e^t$, determine qual a empresa cujo custo de produção estava a crescer mais depressa no instante $t = 1$.

2.2. Seja a função $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{se } x < 0 \\ e^{-kx} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, com $k > 0$.

a) Indique o domínio de f e esboce o gráfico da função.
b) Discuta a continuidade da função no seu domínio.
c) Discuta a diferenciabilidade de f no seu domínio.
d) Considere a função $g(x) = \sqrt{x}$. Discuta a continuidade e a diferenciabilidade de $g \circ f$, e calcule a sua derivada onde possível.

2.3. Seja a função $h(x) = f(x \ln x)$, com f diferenciável em $\mathbb{R}$. Sabendo que $f(0) = \sqrt{3}$ e que $f'(0) = 2$, indique a equação da recta tangente ao gráfico da função h em $x = 1$.

3 Exercícios adicionais

Derive as seguintes funções em ordem a x:

a) $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2$	b) $\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^3$	c) $\sqrt{e^x + 1}$	d) $e^{-\sqrt{x}}$
e) $e^{x^3} \ln\left(x^2\right)$	f) $\frac{3}{\sqrt{x}}$	g) $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}$	h) e^{x^2}
i) $\ln\left(e^{3x} + x^2\right)$	j) $e^x \ln x$	k) $\sin(2x+1)$	ℓ) xe^x
m) $\cos x + x\cos^2\left(x^2\right)$	n) $\sin x \cos x$	o) $\tan\left(x^2+1\right)$	p) $\ln \frac{1+x}{1-x}$

3.1. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

3.2. Indique o valor correcto de $L = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^{\alpha} - 2\alpha(x-1) - 2}{3x^2 - 6x + 3}$:

a) $L = -\alpha - 3$ b) $L = 0$ c) $L = \frac{\alpha^2 - \alpha}{3}$ d) L não existe

3.3. Qual o valor do limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(5/x)}{2/x}$?

a) $\frac{5}{2}$ b) 0 c) $-\frac{5}{2}$ d) $\frac{2}{5}$.

3.4. Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que $h(x) = f[g(x)]$. Sabendo que $f(-1) = 2$, $f'(-1) = 1/3$, $g(3) = -1$, e $g'(3) = -4$, indique a equação da recta tangente ao gráfico da função h, em $x = 3$:

a) $y = -\frac{4}{3}x + 2$ b) $y = -\frac{4}{3}x + 6$ c) $y = -4x + 2$ d) $y = -x + 5$

3.5. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 6.2: Exercícios 5 e 7.