Matemática I – 2º Semestre 2010/11
Ficha de exercícios

Semana 12: Cap. 9 – Integrais e Áreas (Parte I)

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\int x^2 dx$ b) $\int \sqrt{x} dx$ c) $\int e^x dx$ d) $\int \cos y dy$ e) $\int \frac{x^5}{5} dx$ f) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

g) $\int \frac{1}{2} dx$ h) $\int x^4 dt$ *i)* $\int (\sin u + x^2) dx$ *j)* $\int (\sin u + x^2) du$ *k)* $\int e^{7u} dx$ ℓ) $\int \frac{1}{2} dt$.

1.2. Calcule a primitiva $F(x) = \int f(x)dx$:

a) tal que $F(2) = 0$, para $f(x) = x^4$;
b) tal que $F(0) = 1$, para $f(x) = e^x$;
c) tal que $F(1) = \pi$, para $f(x) = x^{-1}$;
d) tal que $F(0) = e$, para $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 12$;
e) tal que $F(1) = 0$, para $f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

1.3. Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_0^2 x^3 dx$ b) $\int_1^0 (-\sqrt{x}) dx$ c) $\int_0^{\ln 1} e^{-t} dt$ d) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos y dy$ e) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

f) $\int_{-1}^{1} (6x^5 + \frac{1}{3}x^2 - 2x + 7) dx$ g) $\int_2^3 (\sin u + x^{\frac{1}{3}}) dx$ *h)* $\int_e^{7e} e^{7u} dx$ *i)* $\int_a^b 1 dt$.

1.4. Calcule a área entre o gráfico de f e o eixo das abcissas para:

a) $f(x) = x^2$, e $x \in [0; 2]$;
b) $f(x) = -x^2$, e $x \in [0; 2]$;
c) $f(t) = e^{-t}$, e $t \in [1; 5]$;
d) $f(x) = -\sqrt{\sqrt{x}}$, e $x \in [0; 1]$;
e) $f(x) = \dfrac{-x^4 - 2x^2}{x}$, e $x \in [-1; 1]$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$, e $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ constantes. Demonstre que:

a) $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.

b) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

c) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, com $a \leq c \leq b$.

2.2. Seja $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua ímpar, e $k \in \mathbb{R}$.
a) Demonstre que $\displaystyle\int_{-k}^{k} f(x)dx = 0$.
b) Interprete geometricamente o resultado anterior.

2.3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, e seja $d(a, b)$ a distância entre estes dois pontos.
a) Mostre que $d(a, b) = \displaystyle\int_{a}^{b} dx$.
b) Interprete geometricamente o resultado anterior.

3 Problemas e Modelização

3.1. Um poço de petróleo tem uma taxa de extracção (medida em barris por unidade de tempo) que varia com o tempo t segundo: $10e^{-2t}$.

a) Qual a quantidade de petróleo extraída do poço ao fim do tempo $t = 50$?
b) Resolva o mesmo problema para uma taxa que varia segundo 2^{-t}, explicando claramente todos os cálculos.

3.2. Seja a funçao $f(x) = \sin x$. Calcule a área entre o gráfico de f e o eixo das abcissas para:
a) $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$;
b) $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$;
c) $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
d) Discuta os resultados do ponto de vista geométrico.
e) Discuta os resultados do ponto de vista do teorema apresentado no exercício 2.2.

3.3. Seja a funçao $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$. Calcule a área entre o gráfico de f e o eixo das abcissas para $x \in [-1; 2]$.

4 Exercícios adicionais

4.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 9.1: Exercícios 1 a 9;
Secção 9.2: Exercícios 1 a 6, 8.