Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 9

(1) Determine uma função contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad f(0) = 1.$$

(2) Calcule, utilizando o método de primitivação por substituição, uma primitiva de cada uma das seguintes funções, no seu domínio:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$;

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}}$;

(c) $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$;

(3) Calcule

(a) $\int \sqrt{2x+3}\, dx$

(b) $\int (2x-3)^{-2}\, dx$

(c) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\, dx$

(d) $\int \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\theta)}}\, d\theta$

(e) $\int \sin^2 x\, dx$

(f) $\int \sin^3 x\, dx$

(g) $\int \operatorname{tg} x\, dx$

(h) $\int \cos^4 x\, dx$

(i) $\int \frac{1}{x \log(2x)}\, dx$

(j) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$

(k) $\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$

(l) $\int \sin(2x)\sqrt{\cos(2x)}\, dx$

(m) $\int x^\alpha \log(x)\, dx$ para $\alpha \neq -1$

(4) (*) Prove por indução que:

$$\int x^n e^x\, dx = e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!} x^k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(5) Seja $f(x) = \dfrac{ax+1}{x^2+bx+c}$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $b^2 - 4c < 0$;

(a) Prove que existem $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 + bx + c = (x - p)^2 + q^2$.

(b) Utilize a substituição $x = \varphi(t) = p + qt$ e o resultado da alínea anterior para calcular uma primitiva da função f.

(c) Repita o raciocínio das alíneas anteriores para calcular uma primitiva de $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 + 2x + 2}$.

(6) Primitive as seguintes funções:

(a) $\dfrac{x^4}{1-x}$;

(b) $\dfrac{x+1}{x^4 + 4x^2}$;

(7) Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$, com $I = [0, 2]$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1[\\ 2, & x = 1 \\ 3, & x \in]1, 2]. \end{cases}$$

(a) Mostre que para qualquer partição d do intervalo I as somas de Darboux S_d e s_d verificam a relação: $s_d \leq 4 \leq S_d$.

(b) Justifique que f é integrável à Riemann em I e que $\int_I f = 4$.