Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2008/2009

EXAME FINAL 15 Janeiro 2009

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Considere os conjuntos

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z + \log(z/x) - \log(z/y) = 0,\ x, y, z > 0\right\},$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 - y^2 = z\}.$$

(a) Mostre que M, N e $M \cap N$ são variedades diferenciais e determine as suas dimensões.

(b) Escreva os espaços tangente e normal de $M \cap N$ num ponto qualquer $p \in M \cap N$.

(2) Calcule:

(a) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

(b) o integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx.$$

(c) o ponto sobre a superfície esférica de centro $(2, 3, 4)$ e raio 1, mais próximo da origem.

(3) Considere a curva em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 9x^2 + 4y^2 = 36\}.$$

(a) Calcule o integral em Γ da função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{81x^2 + 16y^2}$.

(b) Seja

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in \Gamma,\ z \in [0, 1]\}.$$

Determine o fluxo de $g(x, y, z) = (0, 0, 1)$ através de M.

(4) Considere o conjunto $\Omega = [0, 1]$ e o subconjunto das partes de Ω dado por $\mathcal{A} = \{\{0\}, \{1\}\}$. Indique a σ-álgebra $\mathcal{F}$ gerada por $\mathcal{A}$. Decida se

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \text{ ou } 1 \in A \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad A \in \mathcal{F},$$

é uma medida de probabilidade.

(5) (a) Calcule

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/n}\, dt.$$

(b) Mostre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sugestão: Recorde que $1/(1 - y) = \sum_{n \geq 0} y^n$ com $|y| < 1$. Use o teorema de Beppo-Levi.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2008/2009

EXAME FINAL 30 Janeiro 2009

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x-y).$$

(a) Mostre pelo teorema da função implícita que numa vizinhança de $(1,1,0)$ o conjunto $F^{-1}(\{(2,0)\})$ é o gráfico de uma função $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

(b) Encontre uma parametrização de $F^{-1}(\{(2,0)\})$ numa vizinhança U de $(1,1,0)$.

(2) Considere o caminho $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

Calcule:

(a) o comprimento da curva $\Gamma = \gamma([0,2\pi])$.

(b) o integral do campo vectorial $f(x,y,z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, 1)$ ao longo de γ.

(3) Decomponha a unidade num produto de três números positivos cuja soma seja mínima.

(4) Considere a superfície

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2,\ \frac{\pi}{2} < z < \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

(a) Escreva uma representação paramétrica de M e determine o integral de $f(x,y,z) = (x+y)\sin z$ em M.

(b) Calcule o fluxo do campo vectorial $g(x,y,z) = (xz^2, yz^2, z^3)$ através de M segundo a normal unitária com terceira componente negativa.

(5) Seja

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{N}^2 \colon \omega_1, \omega_2 \in \{0, \dots, 9\}\}$$

e $A_i = \{\omega \in \Omega \colon \omega_1 = i\}$ para $i \in \{0, \dots, 9\}$. Determine a σ-álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$. Nestas condições, construa uma medida de probabilidade.

(6) Calcule:

(a)

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \sin^n(x+y)\, dx\, dy.$$

(b)

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} \left[\frac{2n^2}{n^2 + x^2} + f(x^n) \right] dx,$$

onde $f \in C^0([0,1])$.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2009/2010

EXAME FINAL 6 Janeiro 2010

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Considere o conjunto

$$M = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \colon ad - bc = 1\right\}$$

e a função $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

(a) Mostre que M é uma variedade diferencial e determine a sua dimensão.

(b) Determine os espaços tangente e normal a M no ponto $(1,0,0,1)$.

(c) Prove que $\varphi \geq 2$ em M.
Sugestão: Encontre o mínimo de φ em M.

(2) Calcule:

(a) os pontos de

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 = y^2 + z^2,\ 2x + z = 2\right\}$$

mais próximos e mais distantes da origem.

(b) o centróide de

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

(c) o integral

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} e^{-y/x}\, \frac{y}{x}\, dx\, dy.$$

Sugestão: Use o teorema de Fubini.

(d) o integral

$$\int_V \mathrm{div} f$$

onde $f(x,y,z) = \big(-y\sin^2(x+y), x\sin^2(x+y), z\big)$ e

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x-y < 1,\ 0 < x+y < 1,\ 0 < z < 1\}$.

(3) Seja

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{N}^2 \colon \omega_1, \omega_2 \in \{0, \dots, 9\}\}$$

e $A_i = \{\omega \in \Omega \colon \omega_1 = i\}$ para $i \in \{0, \dots, 9\}$.

(a) Determine a σ-álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$ denotada por $\sigma(\mathcal{A})$.

(b) Considere a aplicação $\mu \colon \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(A) = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

onde $\#B$ indica o número de elementos de um qualquer conjunto B. Mostre que μ é uma medida de probabilidade.

(4) Dado $q \in]0,1[$, mostre que a função μ definida em subconjuntos A de $\mathbb{N}$ por

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} (1-q) q^{n-1},$$

define uma medida de probabilidade em $\mathbb{N}$.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2009/2010

EXAME FINAL 27 Janeiro 2010

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ considere o conjunto

$$M_\theta = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \colon ad - bc = \theta,\ a + d = 0\right\}$$

e a função $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

(a) Determine para que valores de θ o conjunto M_θ é uma variedade diferencial e qual a sua dimensão.

(b) Determine os espaços tangente e normal a M_θ no ponto $(0,-\theta,1,0)$ com $\theta \neq 0$.

(c) Prove que $\varphi \geq 2\,|\theta|$ em M_θ com $\theta < 0$.

(2) Considere o caminho $\gamma \colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t, \sin t, t)$$

e o campo vectorial

$$f(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{(x^2-y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2-y^2)^2}, z^2\right).$$

(a) Mostre que f é o gradiente de uma função escalar.

(b) Calcule o integral do campo vectorial f ao longo de γ.

(3) Considere o conjunto

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x < 1,\ x^2 - 1 < y < x^2,\ x^3 < z < x^3 + 2\right\}.$$

(a) Decida se $h(x,y,z) = (x, y - x^2, z - x^3)$ é uma mudança de coordenadas em S e determine $h(S)$.

Sugestão: Recorde que h é uma mudança de coordenadas sse é C^1, injectiva e $\det Dh(x,y,z) \neq 0$.

(b) Indique o valor de

$$\int_S \frac{z - x^3}{1 + x^2}\, dx\, dy\, dz.$$

(4) Seja $f \colon E \to \mathbb{R}$ mensurável e E um conjunto mensurável tal que $m(E) < +\infty$. Considere a função $\omega \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega(x) = m\left(\{y \in E \colon f(y) > x\}\right).$$

(a) Determine $\lim_{x\to+\infty} \omega(x)$, $\lim_{x\to-\infty} \omega(x)$ e a monotonia de ω.

(b) Qual a condição para que ω seja contínua num ponto $a \in \mathbb{R}$.

(5) Dado $\lambda > 0$, mostre que a função μ definida em subconjuntos A de $\mathbb{N}$ por

$$\mu(A) = \sum_{n\in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!},$$

define uma medida de probabilidade em $\mathbb{N}$.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2010/2011

EXAME ÉPOCA NORMAL 5 Janeiro 2011

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todos os cálculos

(1) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ considere o conjunto

$$M_\theta = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \colon ad - bc = \theta,\ a + d = 0\right\}$$

e a função $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

(a) Determine para que valores de θ o conjunto M_θ é uma variedade diferencial e qual a sua dimensão.

(b) Determine os espaços tangente e normal a M_θ no ponto $(0,-\theta,1,0)$ com $\theta \neq 0$.

(c) Prove que $\varphi \geq 2\,|\theta|$ em M_θ com $\theta < 0$.

(2) Calcule:

(a) a massa do sólido

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\right\}$$

sabendo que a densidade de massa é dada por

$$\rho(x,y,z) = e^{-x^2-y^2}.$$

(b) o centróide de

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x,y,z \geq 0\}.$$

(c) o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x^2+y^2)^{n/2}}{1 + (x^2+y^2)^{(n+3)/2}}\, dx\, dy.$$

(3) Calcule, para o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + y < 1, 0 < y < x\},$$

o valor de

$$\int_A (x^2 - y^2) e^{-(x+y)^4} \, dx \, dy.$$

(4) Seja $\alpha > 0$. Considere a superfície

$$S_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \alpha(x^2 + y^2), 1 < x^2 + y^2 < 2\}$$

e a normal unitária ν a S_α com terceira componente negativa. Determine o fluxo de $F(x, y, z) = (y^3, x^3, (z-\alpha)(z-2\alpha))$ através de S_α segundo ν.

(5) Seja Ω um conjunto finito e não vazio. Considere a σ-álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$ contendo todos os subconjuntos de Ω. Seja $p \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $p(\omega) \geq 0$ para qualquer $\omega \in \Omega$, e

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

(a) Mostre que

$$\mu(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \qquad A \subset \Omega$$

define uma medida de probabilidade em $\mathcal{P}(\Omega)$.

(b) Para $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ e $p(\omega) = \frac{1}{4}$, calcule $\int_\Omega \varphi \, d\mu$ onde $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(\omega_1, \omega_2) = 1$ se $\omega_1 = 0$ e $\varphi(\omega_1, \omega_2) = 0$ caso contrário.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2010/2011

EXAME ÉPOCA RECURSO 26 Janeiro 2011

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todos os cálculos

(1) Calcule:

(a) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ y > 0\}.$$

(b) o integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx.$$

(c) o ponto sobre a superfície cilíndrica com eixo dado pela recta $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 1, y = 0\}$ e raio 2, mais próximo da origem.

(2) Seja $r > 0$ e

$$S_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = r^2, y > 0\}.$$

Considere a normal unitária ν a S_r cuja segunda componente é negativa. Calcule o valor de r para o qual o fluxo de $F(x, y, z) = (z^2y^3, x^2 + z^2, x^2y^3)$ através de S_r segundo ν é $-\pi$.

Sugestão: Note que ν não é necessariamente exterior.

(3) Calcule o integral de linha de

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}\right)$$

ao longo da fronteira do losango que une os pontos $(2, 0), (0, -2), (-2, 0), (0, 2)$ no sentido horário.

(4) Dado $\lambda > 0$, considere a seguinte função μ definida para subconjuntos A de $\mathbb{N}$:

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

(a) Mostre que μ define uma medida de probabilidade em $\mathbb{N}$.

(b) Calcule o integral $\int_{\mathbb{N}} \varphi \, d\mu$ onde $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(n) = n$ se $n \leq 3$ e $\varphi(n) = 0$ caso contrário.

(c) Calcule $\int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n} \, d\mu(n)$.

(5) Considere $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$, dê um exemplo de um conjunto aberto V tal que $A \subset V$ e $m(V) \leq \varepsilon$, onde m é a medida de Lebesgue. *Sugestão*: Recorde que a união de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto.

(6) Seja a função em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por

$$f(x) = \|x\|^{-\|x\|}.$$

Determine se f é integrável à Lebesgue no seu domínio.