

Semana 2: Cap. 1 – Vectores

## 1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Sejam os vectores de  $\mathbb{R}^2$ :  $\vec{u} = (1, 2)$  e  $\vec{v} = (-1, 1)$ . Represente estes vectores no plano e determine geometricamente: a)  $\vec{u} + \vec{v}$     b)  $\vec{u} - \vec{v}$     c)  $-\vec{u} + 3\vec{v}$     d)  $\|\vec{u}\|$     e)  $d(\vec{u}, \vec{v})$ .

1.2. Resolva analiticamente as alíneas do exercício anterior e compare com os resultados obtidos geometricamente.

1.3. Considere os seguintes vectores de  $\mathbb{R}^3$ :  $\vec{u} = (a, 1 + a, 2a)$ ,  $\vec{v} = (1, 1, 3)$  e  $\vec{w} = (2, 1, 0)$ . Determine o valor de  $a \in \mathbb{R}$  de modo a obter o vector  $\vec{u}$  como combinação linear dos vectores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

1.4. Os vectores  $\vec{u} = (-1, -1, -a, -1)$  e  $\vec{v} = (a + 2, a, a, a)$ , com  $a \in \mathbb{R}$ , são ortogonais se e só se:

- a)  $a = 2$     b)  $a = 0$     c)  $a = -2$  ou  $a = -1$     d)  $a = 1$ .

1.5. Calcule a distância  $d(\vec{u}, \vec{v})$  para os vectores do exercício 1.4 (com  $a \in \mathbb{R}$ ).

## 2 Definições e Demonstrações

2.1. Sejam  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , demonstre as seguintes propriedades do produto escalar:

- a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$   
b)  $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

2.2. Indique a distância  $d(\vec{u}, \vec{v})$  entre dois vectores  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

2.3. Demonstre que  $\|\vec{u}\| > 0$  para qualquer  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ .

2.4. Defina combinação linear de vectores.

2.5. Sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  linearmente independentes. Mostre que os vectores  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} + \vec{w}$  e  $\vec{v} + \vec{w}$  formam igualmente um conjunto de vectores linearmente independentes.

## 3 Problemas e Modelização

3.1. Imagine os seguintes índices económicos, sem unidades:

País	Produtividade	Competitividade	Crescimento económico
Portugal	3	2	-1
Canadá	8	5	0
Tailândia	1	1	-3

- a) Qual o país mais próximo de Portugal no conjunto destes três índices?  
b) Neste modelo, o conjunto dos índices portugueses depende linearmente dos índices dos outros dois países?

**3.2.** Tendo em conta as seguintes notas e os respectivos pesos:

Disciplina	Peso	Notas do João	Notas da Leonor
Matemática	3/10	?	15
Contabilidade	3/10	18	12
Direito	3/10	10	14
Inglês	1/10	16	15

- a) Calcule a nota média destes alunos utilizando o produto escalar de vectores.  
b) Qual a nota que o João precisa de obter a Matemática para igualar a média da Leonor?

## 4 Exercícios adicionais

**4.1.** Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

**Secção 15.7:** Exercícios 1 a 8;

**Secção 15.8:** Exercícios 1 a 6.

**4.2.** Sejam  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , demonstre a desigualdade triangular:  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .  
(Sugestão: desenvolva  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$  e utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz.)