

Semanas 3 e 4: Cap. 2 – Matrizes

## 1 Exercícios de aplicação directa

**1.1.** Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

**Secção 15.2:** Exercícios 1, 2 e 4;

**Secção 15.3:** Exercícios 1, 3 e 4;

**Secção 15.4:** Exercícios 1, 2 e 4;

**Secção 15.5:** Exercícios 1 a 4.

**1.2.** Indique um exemplo de uma matriz diagonal  $D$  e de um vector  $\vec{v}$  de igual dimensão, e calcule  $D\vec{v}$ .

**1.3.** Indique um exemplo de uma matriz triangular superior  $S$  e calcule a sua transposta  $S'$ .

**1.4.** Indique dois vectores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de igual dimensão, e uma combinação linear dos dois vectores.

**1.5.** Determine a característica das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

## 2 Definições e Demonstrações

**2.1.** Sejam as matrizes  $A$  e  $B$  de dimensões  $k \times p$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Demonstre que:

a)  $A + B = B + A$       b)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$       c)  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ .

**2.2.** Seja  $I$  a matriz identidade de dimensão  $n$  e seja  $k \in \mathbb{N}$ . Prove que  $I^k = I$ .

**2.3.** Sejam a matriz  $A$  de dimensões  $k \times p$ , a matriz  $B$  de dimensões  $p \times \ell$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Demonstre:

a)  $(\lambda A)' = \lambda A'$       b)  $(AB)' = B' A'$ .

**2.4.** Seja uma matriz  $A$  de dimensões  $m \times n$ . Mostre que no caso  $n = 1$ ,  $A' A = 0 \Rightarrow A = \mathbf{0}$ .

**2.5.** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes permutáveis ( $AB = BA$ ) e  $C$  uma matriz tal que  $C = 3A^2 - 5A - I$ , onde  $I$  designa a matriz identidade. Mostre que as matrizes  $C$  e  $B$  são permutáveis.

## 3 Problemas e Modelização

**3.1.** Seja a matriz  $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  e o vector  $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

a) Represente o círculo trigonométrico e indique os valores de  $\sin \theta$  e de  $\cos \theta$  para os ângulos  $\theta = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ .

b) Calcule  $R(\theta)\vec{e}_x$  e represente geometricamente o respectivo resultado, mostrando que  $R(\theta)$  representa a rotação do vector  $\vec{e}_x$  por um ângulo  $\theta$  em torno da origem.

c) Verifique que  $[R(\theta)]^2 = R(2\theta)$  usando as identidades trigonométricas:  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ , e  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ .

d) Interprete geometricamente o resultado anterior.

**3.2.** Três empresas obtiveram os seguintes resultados líquidos (em milhões de euros) em 2008:

Empresa	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
Empresa 1	5	2	-1	2
Empresa 2	2	8	0	5
Empresa 3	1	3	-1	2

tendo em seguida obtido os seguintes resultados em 2009:

Empresa	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
Empresa 1	2	7	3	5
Empresa 2	4	4	6	6
Empresa 3	-1	-1	-1	0

- Determine, para cada empresa, em cada trimestre, a diferença de resultados entre 2009 e 2008.
- Determine, para cada empresa, em cada trimestre, o resultado médio dos dois anos.

**3.3.** Seja o conjunto de vectores  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-4, 2, -8)\}$ .

- Determine através da definição se se trata de um conjunto de vectores linearmente independentes.
- Defina característica de uma matriz e determine o resultado da alínea anterior através do estudo de uma característica.

## 4 Exercícios adicionais

**4.1.** Determine a característica das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

**4.2.** Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

**Secção 15.2:** Exercício 3;

**Secção 15.3:** Exercícios 2 e 5;

**Secção 15.4:** Exercícios 3, 6 e 7;

**Secção 15.5:** Exercícios 5 e 7.