

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 10

(1) Calcule:

- (a) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-25} dx$
- (b) $\int_2^4 \frac{x^3}{x-1} dx$
- (c) $\int_{1/2}^e x \log x dx$
- (d) $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x dx$

(2) Mostre que existe uma única função $f \in C^0([0, 1])$ satisfazendo

$$\int_0^x f(t) dt = \int_x^1 f(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

(3) Seja $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \int_{2x}^{x+x^2} f(t) dt.$$

- (a) Justifique que φ é diferenciável em \mathbb{R} .
- (b) Mostre que $\varphi'(1) - \varphi(1) = f(2)$.

(4) Sejam $u, v \in C^0(\mathbb{R})$ tais que

$$\int_a^x u = \int_b^x v, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Prove que $u = v$ e $\int_a^b u = 0$.

(5) Calcule

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^5 dt}{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}.$$

(6) Considere $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \log t dt.$$

- (a) Mostre que φ é diferenciável e calcule φ' .
- (b) Estude a monotonia de φ e mostre que tem um único zero em \mathbb{R}^+ .

(7) Considere $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f, & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Prove que F é contínua e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (b) Mostre que F pode não ser diferenciável na origem.

(8) Calcule a área limitada pelas curvas definidas pelas seguintes equações:

- (a) $y = 9 - x^2$ e $y = x^2$
- (b) $y = x/2$, $y = x$ e $y = x^2$

(9) Calcule o comprimento

- (a) do arco da parábola $x = y^2$, formado pelos pontos $x \leq 1$.
- (b) do arco da parábola $y^2 = -4x$ entre o ponto $(-4, 4)$ e a origem.