Análise Matemática III

LISTA 3

(1) Dados $R > r > 0$, considere o conjunto

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\}.$$

- (a) Mostre que M é uma variedade diferencial e calcule $\dim M$.
- (b) Determine T_pM e $T_pM^\perp$ para qualquer $p \in M$.
- (c) Seja $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x, y, z) = y$. Calcule os extremos de $\varphi|M$.

(2) Calcule:
- (a) $\int_0^1 \int_0^1 (\sqrt{y} + x - 3xy^2) \, dx \, dy$.
- (b) $\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2 x \, \sin^2 y \, dx \, dy$.
- (c) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x + y) \, dx \, dy$.
- (d) $\int_0^\pi \int_0^\pi |\cos(x + y)| \, dx \, dy$.
- (e) $\int_1^2 \int_1^2 y^{-3} e^{2x/y} \, dx \, dy$.
- (f) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 xy^2 z^3 \, dx \, dy \, dz$.

(3) Calcule o volume da região por baixo do gráfico de $f \colon [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y, & x + y \leq 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

(4) Esboce S e calcule $\int_S f$ onde
- (a) $f(x, y) = x \cos(x + y)$ e S é o triângulo $(0, 0)$, $(0, \pi)$ e (π, π).
- (b) $f(x, y) = e^{x+y}$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \leq 1\}$.
- (c) $f(x, y, z) = xy^2 z^3$ e S é o sólido limitado pelos três planos coordenados, pela superfície $z = xy$ e pelo plano $x + y = 1$.
- (d) $f(x, y, z) = (1 + x + y + z)^{-3}$ e S é o sólido limitado pelos três planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$.
- (e) $f(x, y, z) = \sqrt{1 + y}$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 - 1 \leq y \leq 1,\ x \geq 0,\ 0 \leq z \leq y\}$.

(5) Calcule a área e o centróide de

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ y + x \leq 1,\ y \leq x\}.$$

(6) Sabendo que a densidade de massa do objecto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$$

é $\rho(x,y) = (1-y)/(1+x)$, determine a sua massa e o seu centro de massa.

(7) Calcule a distância média entre um canto de um quadrado e os pontos do seu interior. *Sugestão*: Para calcular a primitiva de $\sqrt{1+x^2}$, use a substituição $x = \sinh(\alpha)$ (recorde que $\sinh(\alpha) = (e^{\alpha} - e^{-\alpha})/2$).

(8) * Demonstre o teorema de Fubini.