Matemática I – 1º Semestre 2011/12
Ficha de exercícios

Semana 6: Cap. 4 – Sistemas de Equações Lineares $n \times n$

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Utilize um determinante para calcular a área do paralelogramo definido pelos vectores:
a) $\vec{u} = (3, 0)$ e $\vec{v} = (2, 6)$;
b) $\vec{u} = (\alpha, \alpha)$ e $\vec{v} = (\beta, \beta)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.2. Utilize um determinante para calcular o volume do paralelipípedo definido pelos vectores:
a) $\vec{u} = (3, 0, 0)$, $\vec{v} = (2, 6, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 2)$;
b) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$;
c) $\vec{u} = (2, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 2, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 2)$;
d) $\vec{u} = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{w} = (0, 0, 1, 0)$ e $\vec{s} = (0, 0, 1, 0)$.

1.3. Use a regra de Cramer para resolver os seguintes sistemas de equações e em seguida verifique as soluções encontradas:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -6 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{c)} \begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ 3x - 2y + 5z = 14 \\ 2x - 5y + 3z = 1 \end{cases}.$$

1.4. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, tal que $|A| = k$ com $k \in \mathbb{R}$. Indique, justificando, o valor dos seguintes determinantes:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \left| 3 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right|;$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}; \quad \text{e)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \text{f)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.5. O valor de $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & x & y \\ 2 & 1 & y & x \end{vmatrix}$ é igual a:

a) $-x^2 + y^2 + x + y$ b) $x^2 + y^2 + x - y$
c) $x^2 - y^2 - x - y$ d) Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

1.6. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 16.5: Exercício 2.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Demonstre que se uma matriz quadrada tiver uma linha ou uma coluna nula, então o seu determinante é 0.

2.2. Seja M uma matriz triangular superior de ordem 4.
a) Demonstre que o determinante de M é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de M.
b) Demonstre que o resultado da alínea anterior também é verdadeiro para uma matriz triangular inferior de ordem 4.

2.3. Uma matriz M quadrada diz-se *ortogonal* se $M'M = I$, onde I é a matriz identidade. Demonstre que:
a) O produto de duas matrizes ortogonais $n \times n$ é uma matriz ortogonal.
b) O determinante de uma matriz ortogonal é sempre $+1$ ou -1.

2.4. Sem calcular os determinantes, demonstre que: $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2$.

3 Problemas e Modelização

3.1. Uma empresa da industria alimentar produz diariamente farinha de trigo, farinha de centeio e farinha de milho. A produção total da empresa é de k toneladas por dia. Sabendo que a produção diária conjunta de farinha de trigo e de centeio é o triplo da produção de farinha de milho, e que a produção diária conjunta de farinha de trigo e de milho é o dobro da produção de farinha de centeio, utilize a regra de Cramer para determinar a fracção de k que corresponde à produção diária de farinha de trigo.

3.2. Considere o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x+z &= a \\ y+az &= 0 \\ x+(a+1)\,z &= a+b \end{cases}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
a) Utilize a regra de Cramer para encontrar os valores de a e b para os quais este sistema é possível e determinado. O que podemos concluir sobre o sistema para os restantes valores de a e b?
b) Determine as soluções do sistema no caso $a = 1$ e $b = 1$ utilizando a regra de Cramer.

3.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 16.1: Exercícios 6 e 7.

4 Exercícios adicionais

4.1. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n tais que $|A| = k$ e $|B| = q$, com $kq \neq 0$. O determinante de $C = qkAB$ é igual a:

a) $(qk)^n$ b) $(qk)^{n+1}$ c) $(qk)^2$ d) Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

4.2. Considere o seguinte sistema de equações lineares: $\begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.
a) Determine o valor de k para o qual a distância entre as colunas 1 e 2 da matriz dos coeficientes do sistema é igual a $2\sqrt{2}$.

b) Considere o caso $k = 0$ e verifique a desigualdade triangular para as distâncias entre as colunas da matriz dos coeficientes do sistema.
c) Considere o caso $k = 1$ e use a regra de Cramer para determinar o valor de y.

4.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 16.3: Exercícios 1 e 2;
Secção 16.4: Exercícios 1 a 8;
Secção 16.5: Exercício 1.