Teorema da função inversa
Teorema da função implícita

Manuel Guerra

Conteúdo

Em numerosas situações encontramo-nos perante equações do tipo

$$f(x) = y, \tag{1}$$

em que $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ é uma função "regular" (por exemplo, de classe C^1) e seria desejável obter uma equação equivalente do tipo

$$x = g(y) \tag{2}$$

(equivalente aqui significa que um ponto $(x, y) \in A \times \mathbb{R}^n$ satisfaz a equação (1) se e só se satisfaz a equação (2)). Infelizmente, os casos em que a função g pode ser obtida de forma "explícita" (i.e., os casos em que é possivel escrever uma expressão que permita calcular g em qualquer ponto do seu domínio) são a excepção e não a regra.

Exemplo 1 *Para constatar a dificuldade do problema, considere os seguintes casos aparentemente simples:*

1. $y = p(x)$, *em que* p *é um polinómio de grau superior a* 2;
2. $y = x + e^x$;
3. $y = \cos x - x$.

O chamado Teorema da função inversa (Teorema 26) permite contornar parcialmente esta dificuldade. Embora não nos permita obter a função g em forma "explícita", o Teorema 26 garante a existência (pelo menos local) de g diferenciável e permite calcular os diferenciais de g. Estes resultados permitem algumas conclusões no estudo das soluções da equação (1), mesmo em casos em que não estamos em condições de as determinar de forma exacta.

Uma situação um pouco mais geral é aquela em que encontramos uma equação do tipo

$$f(x, y) = 0, \tag{3}$$

em que $f : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ é uma função "regular" (por exemplo, de classe C^1) e seria desejável obter uma equação equivalente do tipo

$$y = g(x).$$

À semelhança do caso anterior, equações do tipo (3) para as quais se consegue obter uma expressão que permita calcular a função g em todos os pontos do seu domínio são a excepção e não a regra. O Teorema da função implícita permite garantir a existência, regularidade e unicidade de funções g que verificam $f(x, g(x)) = 0$ em pequenos domínios abertos.

1 Teorema de ponto fixo

O objectivo desta Secção é apresentar o Teorema de ponto fixo de Banach que permite garantir a existência e unicidade de soluções para sistemas de equações que satisfazem certas condições. Este Teorema será usado na Secção 3 para provar o Teorema da função inversa, mas a sua importância e interesse é bastante mais geral, encontrando aplicações em vários ramos da matemática.

Definição 2 *Considere um conjunto não vazio* $A \subset \mathbb{R}^n$ *e uma função* $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$. *Diz-se que o ponto* $x \in A$ *é um* ***ponto fixo*** *de* f *se verificar*

$$f(x) = x. \square$$

Exemplo 3 *Considere a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida por*

$$f(x) = x^2 - 2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então os pontos $x = 2$ e $x = -1$ são os únicos pontos fixos de f.

Definição 4 *Considere um conjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$. Diz-se que f é uma **contracção** se forem satisfeitas as seguintes condições:*

1. *$f(A) \subset A$;*
2. *Existe uma constante $c \in [0, 1[$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in A. \square$$

Teorema 5 (Teorema de ponto fixo de Banach) *Considere um conjunto fechado não vazio $A \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$.*
Se f for uma contracção, então f tem um único ponto fixo.$\square$

Demonstração. Suponha-se que f é uma contracção e considere-se a sucessão de funções $\left\{f^k : A \mapsto A,\, k \in \mathbb{N}\right\}$ definida pela seguinte regra de recursão:

1. $f^1 = f$;
2. $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right), \qquad \forall x \in A.$

Fixe-se um ponto $x_0 \in A$ e considere-se a sucessão $\left\{x_k = f^k(x_0),\, k \in \mathbb{N}\right\}$. Vamos provar que esta é uma sucessão de Cauchy. Por hipótese, existe $c \in [0, 1[$, tal que $\left\|f^1(x) - f^1(y)\right\| \leq c\|x - y\|$, $\forall x, y \in A$. Considere-se um $k \in \mathbb{N}$, tal que $\left\|f^k(x) - f^k(y)\right\| \leq c^k \|x - y\|$, $\forall x, y \in A$. Então, $\left\|f^{k+1}(x) - f^{k+1}(y)\right\| = \left\|f^1\left(f^k(x)\right) - f^1\left(f^k(y)\right)\right\| \leq c\left\|f^k(x) - f^k(y)\right\| \leq c^{k+1}\|x - y\|$. Isto prova que

$$\left\|f^k(x) - f^k(y)\right\| \leq c^k \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in A, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Considerem-se dois inteiros arbitrários, $k, m \in \mathbb{N}$. Usando a desigualdade (4), obtém-se

$$\begin{aligned}
\|x_{k+m} - x_k\| &= \left\|f^k(x_m) - f^k(x_0)\right\| \leq c^k \|x_m - x_0\| = c^k \left\|\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1})\right\| \leq \\
&\leq c^k \sum_{i=1}^{m} \|x_i - x_{i-1}\| = c^k \sum_{i=1}^{m} \left\|f^i(x_0) - f^{i-1}(x_0)\right\| = \\
&= c^k \sum_{i=1}^{m} \left\|f^{i-1}(x_1) - f^{i-1}(x_0)\right\| \leq c^k \sum_{i=1}^{m} c^{i-1} \|x_1 - x_0\| \leq \frac{c^k}{1 - c} \|x_1 - x_0\|.
\end{aligned}$$

Isto prova que $\{x_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ é uma sucessão de Cauchy. Recorde-se que toda a sucessão de Cauchy é convergente em $\mathbb{R}^n$. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ o limite de $\{x_k,\, k \in \mathbb{N}\}$. Tendo em conta que $\{x_k\}$ é uma sucessão de pontos de A e que A é fechado, conclui-se que $x \in A$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|f(x) - x\| &= \|f(x) - x_k + x_k - x\| \leq \|f(x) - x_k\| + \|x_k - x\| = \\
&= \|f(x) - f(x_{k-1})\| + \|x - x_k\| \leq c\|x - x_{k-1}\| + \|x - x_k\|.
\end{aligned}$$

Fazendo k tender para infinito, conclui-se que $\|f(x) - x\| = 0$, ou seja, x é um ponto fixo de f. Suponha-se que existem dois pontos fixos, x e y. Então

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq c\,\|x - y\|\,.$$

Tendo em conta que $c < 1$, esta desigualdade implica $x = y$, pelo que o ponto fixo é único. ■

Exemplo 6 *Nalguns casos, o Teorema 5 pode ser usado para provar que a solução de um dado sistema de equações existe e é única, sem que para isso seja necessário resolvê-lo. A título de exemplo vai-se provar que o sistema de equações*

$$\begin{cases} x = \cos\frac{x+y}{3} \\ y = \sin\frac{x+y}{3} \end{cases} \tag{5}$$

admite uma única solução.
As soluções do sistema (5) são os pontos fixos da função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x, y) = \left(\cos\frac{x+y}{3}, \sin\frac{x+y}{3}\right).$$

Note-se que

$$\|f(x, y) - f(\overline{x}, \overline{y})\|^2 = \left(\cos\frac{x+y}{3} - \cos\frac{\overline{x}+\overline{y}}{3}\right)^2 + \left(\sin\frac{x+y}{3} - \sin\frac{\overline{x}+\overline{y}}{3}\right)^2.$$

Usando o Teorema de Lagrange, obtém-se

$$\|f(x, y) - f(\overline{x}, \overline{y})\|^2 = (\sin\alpha)^2\left(\frac{x+y}{3} - \frac{\overline{x}+\overline{y}}{3}\right)^2 + (\cos\beta)^2\left(\frac{x+y}{3} - \frac{\overline{x}+\overline{y}}{3}\right)^2, \tag{6}$$

em que α e β são números reais compreendidos entre $\frac{x+y}{3}$ e $\frac{\overline{x}+\overline{y}}{3}$. A igualdade (6) implica que

$$\|f(x, y) - f(\overline{x}, \overline{y})\|^2 \leq 2\left(\frac{x+y}{3} - \frac{\overline{x}+\overline{y}}{3}\right)^2 \leq \frac{4}{9}\left((x-\overline{x})^2 + (y-\overline{y})^2\right),$$

isto é,

$$\|f(x, y) - f(\overline{x}, \overline{y})\| \leq \frac{2}{3}\,\|(x, y) - (\overline{x}, \overline{y})\|\,.$$

Logo, f é uma contracção em $\mathbb{R}^2$, pelo que o Teorema de ponto fixo de Banach garante a existência e unicidade da solução do sistema.

2 Função inversa

O problema de encontrar uma equação do tipo (2) equivalente a uma dada equação do tipo (1) corresponde à determinação de uma função "inversa global" para a função f. Como veremos na Secção 3, as hipóteses do Teorema da função inversa (Teorema 26) dizem respeito à diferenciabilidade da função f. Tendo em conta que diferenciabilidade é uma propriedade "local" de uma função, não é surpreendente que o Teorema 26 garanta apenas a existência de "inversa local". São estes dois conceitos que constituem a matéria desta secção.

Definição 7 *Considerem-se conjuntos não vazios X, Y, e uma função $f : X \mapsto Y$.*
*Diz-se que uma função $g : f(X) \subset Y \mapsto X$ é a **função inversa** de f (também chamada **função inversa global** de f, para a distinguir de funções inversas locais definidas mais adiante) se verificar*

$$g(f(x)) = x, \qquad \forall x \in X.$$

A função inversa de f indica-se por f^{-1}.$\square$

Observação 8 *A função inversa, se existir é única.*

Uma função admite inversa no sentido da Definição 7 se e só se for injectiva. Considere-se uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \mapsto Y$. Se f não for injectiva pode ainda existir um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A \cap X \neq \emptyset$ e que $f : A \cap X \mapsto Y$ seja injectiva. Este facto conduz à seguinte definição.

Definição 9 *Considere-se uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \mapsto Y$ e um ponto $a \in X$.*
*Diz-se que a função f é **localmente injectiva** numa vizinhança do ponto a (ou, de forma mais breve, f é **localmente injectiva** no ponto a) se existir $\varepsilon > 0$ tal que $f : X \cap B(a, \varepsilon) \mapsto Y$ é injectiva.*$\square$

Uma função localmente injectiva admite inversa local no sentido dado pela seguinte definição.

Definição 10 *Considerem-se conjuntos não vazios $X \subset \mathbb{R}^n$, Y.*
*Diz-se que a função $f : X \mapsto Y$ admite **inversa local** na vizinhança do ponto $a \in X$ (ou simplesmente, admite inversa local no ponto $a \in X$) se existir um aberto, $U \subset \mathbb{R}^n$, tal que, $a \in U$ e a função $f : X \cap U \mapsto Y$ admite inversa. Nesse caso, diz-se que a função inversa de $f : X \cap U \mapsto Y$ é uma **função inversa local** de f.*
Funções inversas locais de f indicam-se também por f^{-1}.$\square$

Exemplo 11 *Considere-se a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.*
f admite inversa local na vizinhança de qualquer ponto $a \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, mas não admite nenhuma inversa local na vizinhança do ponto $a = 0$.

Exemplo 12 *A função $f(x) = \sin x$ admite inversa local na vizinhança de qualquer ponto $a \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi, \, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Não admite inversa local na vizinhança de nenhum ponto $a \in \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi, \, k \in \mathbb{Z} \right\}$.*

A existência de inversa global implica a existência de inversas locais em todos os pontos do domínio. O exemplo seguinte mostra que existem funções que admitem inversa local na vizinhança de todos os pontos do seu domínio mas não admitem inversa global.

Exemplo 13 *Considere-se a função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, definida por*

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Note-se que

$$\frac{f(x, y)}{\|f(x, y)\|} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} \left(\cos^2 y + \sin^2 y\right)}} (e^x \cos y, e^x \sin y) = (\cos y, \sin y).$$

Fixe-se $b \in \mathbb{R}$. Então, para cada (u,v) que verifique $u^2 + v^2 = 1$, existe um único $\alpha(u,v) \in [b, b+2\pi[$, que verifica $\cos(\alpha(u,v)) = u$, $\sin(\alpha(u,v)) = v$. Logo, a inversa da função $f : \mathbb{R}\times]b-\pi, b+\pi[\mapsto \mathbb{R}^2$ é

$$f^{-1}(u,v) = \left(\log\left(u^2+v^2\right), \alpha\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)\right), \qquad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Isto prova que f admite inversa local na vizinhança de qualquer ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. No entanto, $f(x,y) = f(x, y+2\pi)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, pelo que não existe inversa global.

Nas Definições 7 e 10, o domínio da função inversa é $f(X)$ ou $f(X \cap U)$, respectivamente. Estes conjuntos podem ser muito "irregulares", o que está geralmente associado a dificuldades importantes na caracterização e análise da função inversa. Por isso, é útil considerar casos em que o conjunto $f(X \cap U)$ seja "regular" (por exemplo, aberto). Uma condição que garante uma tal regularidade é a sobrejectividade da função f, no caso em que o conjunto Y coincide com $\mathbb{R}^m$ ou com um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. É claro que uma função que é injectiva e sobrejectiva admite inversa global cujo domínio é o conjunto Y. Esta é uma situação particularmente favorável mas é também demasiado restritiva para muitas aplicações. Por isso, introduzimos o conceito de sobrejectividade local, formulado na seguinte definição.

Definição 14 *Considere-se uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ e um ponto $a \in X$. Diz-se que a função f é **localmente sobrejectiva** numa vizinhança do ponto a (ou, de forma mais breve, f é **localmente sobrejectiva** no ponto a) se para cada $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que*

$$\forall y \in B(f(a), \delta), \exists x \in X \cap B(a, \varepsilon), f(x) = y.$$

*Dito de forma equivalente, f é **localmente sobrejectiva** no ponto a se para cada $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $B(f(a), \delta) \subset f(B(a, \varepsilon))$.*□

A proposição seguinte decorre imediatamente das definições acima apresentadas.

Proposição 15 *Considere-se um conjunto aberto, $A \subset \mathbb{R}^n$ e uma função contínua $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$. Se f for simultâneamente localmente injectiva e localmente sobrejectiva no ponto $a \in A$, então existem abertos $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, tais que $a \in U$, $f(a) \in V$ e $f : U \mapsto V$ é uma bijecção.*□

Demonstração. Considere-se um ponto $a \in A$, na vizinhaça do qual f é localmente injectiva e localmente sobrejectiva. Fixe-se $\varepsilon > 0$, tal que $f : B(a, \varepsilon) \mapsto \mathbb{R}^m$ é injectiva. Fixe-se em seguida $\delta > 0$ tal que $B(f(a), \delta) \subset f(B(a, \varepsilon))$. A continuidade de f implica que $f^{-1}(B(f(a), \delta))$ é aberto. Logo, os conjuntos $U = B(a, \varepsilon) \cap f^{-1}(B(f(a), \delta))$, $V = B(f(a), \delta)$ verificam a Proposição. ■

3 Teorema da função inversa

O principal objectivo desta Secção é apresentar o Teorema da função inversa (Teorema 26). O caminho seguido para chegar a este objectivo consiste em obter condições que garantem a injectividade local de uma função (Teorema 17), condições que garantem a sobrejectividade local de uma função (Teorema 21) e garantem que a imagem de um aberto por uma dada função é um aberto (Corolário 24). O Teorema da função inversa surge então como um corolário da situação em que todas as condições anteriores são satisfeitas. Esta abordagem tem duas vantagens: por um lado, decompõe-se a demonstração do teorema principal numa sequência de demonstrações mais simples. Por um lado enunciam-se separadamente três resultados que, contribuindo para o resultado final, são também importantes quando considerados separadamente.

Os Teorema 17, 21, 26 e o Corolário 24 têm em comum o facto de deduzirem propriedades de uma função de classe C^1 a partir das propriedades de uma aproximação linear da função. Para provar que as propriedades da aproximação linear se extendem à função, utilizaremos o seguinte Lema.

Lema 16 *Considere-se um conjunto aberto, $V \subset \mathbb{R}^n$, uma função de classe C^1, $f : V \mapsto \mathbb{R}^m$, e um ponto $a \in V$.*
Então,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{\substack{x,y \in B(a,\varepsilon) \\ x \neq y}} \frac{\| f(x) - f(y) - Df(a)(x-y) \|}{\|x-y\|} = 0. \square$$

Demonstração. Considere-se $\varepsilon > 0$, tal que $B(a,\varepsilon) \subset V$. Para quaisquer $x, y \in B(a,\varepsilon)$, verifica-se

$$f(x) - f(y) - Df(a)(x-y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(y + t(x-y))dt - Df(a)(x-y) =$$
$$= \int_0^1 Df(y+t(x-y))(x-y)dt - Df(a)(x-y) = \int_0^1 Df(y+t(x-y)) - Df(a)dt(x-y).$$

Daqui se conclui que

$$\frac{\| f(x) - f(y) - Df(a)(x-y) \|}{\|x-y\|} \leq \frac{\left\| \int_0^1 Df(y+t(x-y)) - Df(a)dt \right\| \|x-y\|}{\|x-y\|} \leq$$
$$\leq \sup_{x \in B(a,\varepsilon)} \| Df(x) - Df(a) \|.$$

Tendo em conta que as derivadas parciais de primeira ordem de f são contínuas, isto prova o Lema. ■

Teorema 17 (Aplicação injectiva) *Considere-se um conjunto aberto, $V \subset \mathbb{R}^n$, uma função de classe C^1, $f : V \mapsto \mathbb{R}^m$, e um ponto $a \in V$.*
Se a aplicação $v \mapsto Df(a)v$ for injectiva, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $f : B(a,\varepsilon) \mapsto \mathbb{R}^m$ é injectiva e admite inversa contínua. Além disso, existe uma constante $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que

$$\left\| f^{-1}(u) - f^{-1}(v) \right\| \leq \alpha \|u - v\|, \qquad \forall u, v \in f(B(a,\varepsilon)). \square \tag{7}$$

Observação 18 *Note-se que as seguintes condições são equivalentes:*

1. *A aplicação $v \mapsto Df(a)v$ é injectiva;*
2. *$Df(a)v \neq 0, \qquad \forall v \neq 0$;*
3. *A característica da matriz* $Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ *é igual a n (i.e., é igual ao número de colunas da matriz).*

Para verificar que as duas primeiras condições são equivalentes, basta notar que a aplicação $v \mapsto Df(a)v$ é linear, pelo que $Df(a)v - Df(a)w = Df(a)(v-w)$. Logo, $Df(a)v = Df(a)w$ se e só se $Df(a)(v-w) = 0$. Para verificar que as condições 2 e 3 são equivalentes, basta notar que $Df(a)v$ é combinação linear das colunas da matriz, i.e., $Df(a)v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} v_i$. Isto prova que a condição 2 é satisfeita se e só se as colunas de $Df(a)$ forem linearmente independentes.
Da equivalência entre a injectividade de $v \mapsto Df(a)v$ e a condição 3, conclui-se que a aplicação $v \mapsto Df(a)v$ só poderá ser injectiva se $n \leq m$.

Demonstração do Teorema 17. Suponha-se que a aplicação $v \mapsto Df(a)v$ é injectiva. A aplicação $v \mapsto Df(a)v$ é contínua. Logo o Teorema de Weierstrass garante a existência de $\min\{\|Df(a)v\| : \|v\| = 1\}$. Tendo em conta a observação 18, verifica-se que $\min\{\|Df(a)v\| : \|v\| = 1\} > 0$. Logo, existe $c > 0$ tal que $\|Df(a)v\| \geq c\|v\|$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$. O Lema 16 garante a existência de $\varepsilon > 0$, tal que $B(a,\varepsilon) \subset V$ e

$$\|f(x) - f(y) - Df(a)(x-y)\| < \frac{c}{2}\|x-y\|, \qquad \forall x, y \in B(a,\varepsilon).$$

Então, quaisquer que sejam $x, y \in B(a,\varepsilon)$, verifica-se

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|Df(a)(x-y) + f(x) - f(y) - Df(a)(x-y)\| \geq \\ &\geq \|Df(a)(x-y)\| - \|f(x) - f(y) - Df(a)(x-y)\| > \frac{c}{2}\|x-y\|, \end{aligned}$$

o que prova que $f : B(a,\varepsilon) \mapsto \mathbb{R}^m$ é injectiva.
Para provar que a aplicação inversa é contínua, basta provar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que verifica a desigualdade (7). Considerem-se dois pontos $u, v \in f(B(a,\varepsilon))$. Sejam $x, y \in B(a,\varepsilon)$, os únicos pontos que verificam $f(x) = u$, $f(y) = v$. Então, a desigualdade

$$\|f(x) - f(y)\| > \frac{c}{2}\|x-y\|$$

é equivalente a

$$\|u-v\| > \frac{c}{2}\left\|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\right\|,$$

ou seja,

$$\left\|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\right\| < \frac{2}{c}\|u-v\|.$$

Logo, $\alpha = \frac{2}{c}$ satisfaz a desigualdade (7). ∎

Exemplo 19 *Considere-se a função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, definida por*

$$f(x,y) = ((2+\cos x)\cos y, (2+\cos x)\sin y, \sin x).$$

Então,

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -(2+\cos x)\sin y \\ -\sin x \sin y & (2+\cos x)\cos y \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

tem característica igual a dois. Logo, o Teorema 17 garante que f é localmente injectiva na vizinhança de qualquer ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. No entanto, facilmente se verifica que $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ não é injectiva, pois $f(x,y) = f(x+2\pi, y) = f(x, y+2\pi)$, qualquer que seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
O aluno interessado é convidado a verificar que a imagem $f\left(\mathbb{R}^2\right)$ é um torus.

O seguinte exemplo mostra que a injectividade do diferencial é condição suficiente mas não necessária para a injectividade local da função.

Exemplo 20 *Considere-se a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida por*

$$f(x) = x^4 - x^3.$$

Então, $Df(x) = 4x^3 - 3x^2$ tem característica igual a um (i.e., é diferente de zero) em todos os pontos excepto $x = 0$ e $x = \frac{3}{4}$. Logo, o Teorema 17 garante que f é localmente injectiva na vizinhança de qualquer ponto $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$.
Em relação aos pontos que não satisfazem a hipótese do Teorema, facilmente se verifica que existe $\varepsilon > 0$ tal que f é injectiva no intervalo $]-\varepsilon, \varepsilon[$, mas f não é localmente injectiva na vizinhança do ponto $x = \frac{3}{4}$.

Teorema 21 (Aplicação sobrejectiva) *Considere-se um conjunto aberto, $V \subset \mathbb{R}^n$, uma função de classe C^1, $f : V \mapsto \mathbb{R}^m$, e um ponto $a \in V$.*
Se a aplicação $v \mapsto Df(a)v$ for sobrejectiva então f é localmente sobrejectiva na vizinhança do ponto a.$\square$

Observação 22 *Note-se que as seguintes condições são equivalentes:*

1. *A aplicação $v \mapsto Df(a)v$ é sobrejectiva;*
2. *A característica da matriz $Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ é igual a m (i.e., é igual ao número de linhas da matriz).*

Para verificar que as duas condições são equivalentes, basta notar que a aplicação $v \mapsto Df(a)v$ é sobrejectiva se e só se o sistema

$$Df(a)v = b$$

admitir solução, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^m$.
Da equivalência entre as condições 1 e 2, conclui-se que a aplicação $v \mapsto Df(a)v$ só poderá ser sobrejectiva se $n \geq m$.

Demonstração do Teorema 21. Suponha-se que a aplicação $v \mapsto Df(a)v$ é sobrejectiva. Tendo em conta a observação 22, a característica de $Df(a)$ é igual ao número das suas linhas, que não excede o número das suas colunas. Este facto implica que a matriz $Df(a)Df(a)^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ admite inversa. Logo, a matriz $M = Df(a)^T \left(Df(a)Df(a)^T\right)^{-1}$ verifica

$$Df(a)Mh = h, \qquad \forall h \in \mathbb{R}^m.$$

Seja $m = \max_{\|h\|=1} \|Mh\|$. O Lema 16 garante a existência de $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset V$ e

$$\|f(x) - f(y) - Df(a)(x - y)\| < \frac{1}{2m} \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in B(a, \varepsilon).$$

Seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2m}$. Vai-se provar que para cada $z \in \overline{B(f(a), \delta)}$ existe $x \in \overline{B(a, \varepsilon)}$, tal que $f(x) = z$. Fixe-se $z \in \overline{B(f(a), \delta)}$, e considere-se a função $g : \overline{B(a, \varepsilon)} \mapsto \mathbb{R}^n$, definida por

$$g(x) = a + M(Df(a)(x-a) + z - f(x)).$$

Então,

$$\|g(x) - g(y)\| = \|M(Df(a)(x-y) + f(y) - f(x))\| \leq m\|f(x) - f(y) - Df(a)(x-y)\|.$$

Isto é,

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x-y\| \qquad \forall x, y \in \overline{B(a, \varepsilon)}. \tag{8}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|g(x) - a\| &\leq \|g(x) - g(a)\| + \|g(a) - a\| \leq \frac{1}{2}\|x-a\| + \|M(z - f(a))\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\|x-a\| + m\|z - f(a)\|. \end{aligned}$$

Logo

$$\|g(x) - a\| \leq \varepsilon, \qquad \forall x \in \overline{B(a, \varepsilon)}.$$

Isto prova que g é uma contracção em $\overline{B(a, \varepsilon)}$. Então o Teorema de ponto fixo de Banach (Teorema 5) garante que g tem um único ponto fixo. Seja x, este ponto fixo. Então

$$\begin{aligned} x &= g(x) \Leftrightarrow x - a = M(Df(a)(x-a) + z - f(x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - a = Df(a)^T \left(Df(a) Df(a)^T\right)^{-1} (Df(a)(x-a) + z - f(x)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow Df(a)(x-a) = Df(a)(x-a) + z - f(x) \Leftrightarrow z = f(x). \end{aligned}$$

Q.E.D.. ∎

Exemplo 23 *Considere-se a função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 (x-1)^2 + y^2$. Então,*

$$Df(x, y) = (2x(x-1)(2x-1), 2y)$$

tem característica igual a um em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, excepto nos pontos $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $(1, 0)$. Então, o Teorema 21 garante que f é localmente sobrejectiva na vizinhança de qualquer ponto de $\mathbb{R}^2 \backslash \left\{(0,0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), (1,0)\right\}$. Facilmente se verifica que os pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são minimizantes locais de f, enquanto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ é um ponto de sela. Daqui se conclui que f é localmente sobrejectiva na vizinhança do ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ mas não é localmente sobrejectiva na vizinhança dos pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

Corolário 24 (Teorema da aplicação aberta) *Considere-se um conjunto aberto, $V \subset \mathbb{R}^n$ e uma função de classe C^1, $f : V \mapsto \mathbb{R}^m$, tal que, para todo $x \in V$ a aplicação $v \mapsto Df(x) v$ é sobrejectiva. Então a imagem por f de qualquer conjunto aberto é um conjunto aberto.*□

Demonstração. Seja $A \subset V$, um conjunto aberto. O Teorema da aplicação sobrejectiva garante que para cada $x \in A$ existem $\varepsilon_x, \delta_x > 0$ tais que $B(f(x), \delta_x) \subset f(B(x, \varepsilon_x))$. Então,

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} B(f(x), \delta_x),$$

i.e., $f(A)$ é aberto. ∎

Exemplo 25 *Considere-se a função do exemplo 23:* $f(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2$. *O Teorema da aplicação aberta garante que qualquer que seja o conjunto aberto* $A \subset \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0,0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), (1,0)\right\}$*, o conjunto* $f(A)$ *é aberto.*

Estamos agora em condições de formular e provar o Teorema da função inversa.

Teorema 26 (Função inversa) *Considere-se um conjunto aberto,* $V \subset \mathbb{R}^n$*, uma função de classe* C^1*,* $f : V \mapsto \mathbb{R}^n$*, e um ponto* $a \in V$*, tal que* $J_f(a) \neq 0$.
Então existe um aberto $U \subset V$ *tal que*

1. $a \in U$;
2. $f(U)$ *é aberto;*
3. $f^{-1} : f(U) \mapsto U$ *é de classe* C^1 *e*

$$Df^{-1}(y)\big|_{y=f(x)} = (Df(x))^{-1}, \qquad \forall x \in U. \square$$

Demonstração. Suponha-se que $J_f(a) \neq 0$. Tendo em conta que f é de classe C^1, a aplicação $x \mapsto J_f(x)$ é contínua. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $J_f(x) \neq 0$ sempre que $\|x - a\| < \varepsilon$. A condição $J_f(x) \neq 0$ garante que a matriz $Df(x)$ admite inversa, ou seja, a aplicação $v \mapsto Df(x)v$ é bijectiva. Então, o Teorema da aplicação injectiva (Teorema 17) garante que existe uma vizinhança de a na qual a função f é injectiva. Seja U, uma tal vizinhança. Pelo Teorema da aplicação aberta (Corolário 24), $f(U)$ é aberto.
Considere-se um ponto qualquer $y \in f(U)$ e seja x, o único ponto de U que verifica $y = f(x)$. Então, para todo $\|h\|$ suficientemente pequeno, verifica-se $y + h \in f(U)$. Então

$$\left\|f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y) - (Df(x))^{-1} h\right\| = \left\|(Df(x))^{-1}\left(Df(x)\left(f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)\right) - h\right)\right\|.$$

Logo, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{aligned}
\left\|f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y) - (Df(x))^{-1} h\right\| &\leq c\left\|Df(x)\left(f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)\right) - h\right\| = \\
&= c\left\|(y+h) - y - Df(x)\left(f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)\right)\right\| = \\
&= c\left\|f\left(f^{-1}(y+h)\right) - f(x) - Df(x)\left(f^{-1}(y+h) - x\right)\right\|.
\end{aligned}$$

Fixe-se $\delta > 0$. Tendo em conta que f^{-1} é contínua, o Lema 16 garante que para todo h suficientemente pequeno se verifica

$$\left\|f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y) - (Df(x))^{-1} h\right\| \leq \delta\left\|f^{-1}(y+h) - x\right\| = \delta\left\|f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)\right\|.$$

Então, o Teorema da aplicação injectiva (Teorema 17) garante que para todo h suficientemente pequeno se verifica

$$\left\|f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y) - (Df(x))^{-1} h\right\| \leq \delta\alpha\|h\|,$$

em que α é uma constante que não depende de y nem de h. Tendo em conta que δ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, isto prova que

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\left\|f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y) - (Df(x))^{-1} h\right\|}{\|h\|} = 0,$$

ou seja, f^{-1} é diferenciável e $Df^{-1}(y)\big|_{y=f(x)} = (Df(x))^{-1}, \qquad \forall x \in U$. A continuidade da aplicação $x \mapsto Df(x)$ implica a continuidade da aplicação $x \mapsto (Df(x))^{-1}$. Logo, f^{-1} é de classe C^1. ∎

Exemplo 27 *Considere-se a função do exemplo 13*

$$f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Então,

$$J_f(x,y) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^x \neq 0, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, o Teorema 26 garante que a função f admite inversa local nalguma vizinhança de qualquer ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

A condição $J_f(a) \neq 0$ é suficiente mas não necessária para que a função f admita inversa local. Para verificar que existem funções que admitem inversas locais em vizinhanças de pontos que são zeros do determinante Jacobiano basta considerar o seguinte exemplo:

Exemplo 28 *Considere-se a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$. Facilmente se verifica que $Df(0) = 0$ mas f admite inversa global.*

No entanto, é possível provar a seguinte Proposição:

Proposição 29 *Considere-se um conjunto aberto, $V \subset \mathbb{R}^n$ e uma função de classe C^1, $f : V \mapsto \mathbb{R}^n$, tal que $f(V)$ é aberto e f admite inversa de classe C^1. Então*

$$J_f(x) \neq 0, \qquad \forall x \in V. \square$$

Demonstração. Suponha-se que existe $a \in V$ tal que $J_f(a) = 0$. Então existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $Df(a)v = 0$. Tendo em conta que $f^{-1} \circ f(x) = x$, $\forall x \in V$, então $D(f^{-1} \circ f)(a) = Id$, ou seja, $D(f^{-1} \circ f)(a)v = v$. Mas, pela regra de derivação da função composta, temos

$$D(f^{-1} \circ f)(a)v = Df^{-1}(f(a))Df(a)v = Df^{-1}(f(a))0 = 0,$$

o que é uma contradição. ∎

Exemplo 30 *A função do Exemplo 28, $f(x) = x^3$, admite a inversa global $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, cuja derivada é $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$. Facilmente se verifica que $\left(f^{-1}\right)'$ é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$, excepto no ponto $y = f(0) = 0$.*

4 Teorema da função implícita

Para compreender mais facilmente a natureza do Teorema da função implícita, vejam-se os exemplos.31 e 33.

Exemplo 31 *Considere-se a equação*

$$\frac{x^2 - y}{x + y} + x = 0. \tag{9}$$

A equação (9) *pode ser resolvida em ordem a* y, *obtendo-se a equação equivalente*

$$y = \frac{2x^2}{1 - x}, \qquad x \notin \{0, 1\}. \tag{10}$$

A equivalência entre as equações (9) *e* (10) *significa que a função* $g(x) = \frac{2x^2}{1-x}$ *é a única função cujo domínio é* $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ *que verifica*

$$\frac{x^2 - g(x)}{x + g(x)} + x = 0.$$

A ideia principal a reter do Exemplo 31 pode ser formalizada na seguinte definição.

Definição 32 *Considere-se uma equação da forma*

$$f(x, y) = 0 \tag{11}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.
Diz-se que uma função $g : X \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *é* ***definida implícitamente*** *pela equação* (11) *se verificar*

$$f(x, g(x)) = 0, \qquad \forall x \in X.\square$$

A equação (9) do Exemplo 31 define implícitamente uma única função $y = g(x)$ com domínio igual a $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. No entanto, em geral, funções definidas implícitamente não são únicas, como podemos ver no seguinte exemplo, referente à mesma equação.

Exemplo 33 *A equação* (9) *pode também ser resolvida em ordem a* x. *Nesse caso, obtém-se*

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 8y}}{4},$$

pelo que a função $x = h(y)$ *definida implicitamente pela equação* (9) *não é única. Com efeito, dado um conjunto qualquer* $A \subset \mathbb{R}$, *a função*

$$h(y) = \frac{-y + \sqrt{y^2 + 8y}}{4}\chi_{(]-\infty,-8]\cup[0,+\infty[)\cap A}(y) + \frac{-y - \sqrt{y^2 + 8y}}{4}\chi_{(]-\infty,-8]\cup[0,+\infty[)\backslash A}(y)$$

verifica $\frac{h(y)^2 - y}{h(y) + y} + h(y) = 0$. *Existem então tantas funções* $x = h(y)$ *definidas implicitamente pela equação* (9) *quantos os subconjuntos de* $]-\infty, -8] \cup [0, +\infty[$. *Se considerarmos apenas funções contínuas no seu domínio, então as funções* $y = h(x)$ *definidas implicitamente pela equação* (9) *são apenas 4:*

$$\begin{aligned}
h_1(y) &= \frac{-y + \sqrt{y^2 + 8y}}{4}, \qquad y \in \,]-\infty, -8] \cup [0, +\infty[\,; \\
h_2(y) &= \frac{-y - \sqrt{y^2 + 8y}}{4}, \qquad y \in \,]-\infty, -8] \cup [0, +\infty[\,; \\
h_3(y) &= \begin{cases} \frac{-y + \sqrt{y^2 + 8y}}{4}, & se\ y \in \,]-\infty, -8] \\ \frac{-y - \sqrt{y^2 + 8y}}{4}, & se\ y \in [0, +\infty[\,; \end{cases} \\
h_4(y) &= \begin{cases} \frac{-y - \sqrt{y^2 + 8y}}{4}, & se\ y \in \,]-\infty, -8] \\ \frac{-y + \sqrt{y^2 + 8y}}{4}, & se\ y \in [0, +\infty[\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Considere-se um ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ *que verifique a equação* (9) *com* $y \in \left]-\infty, -8\right[\cup \left]0, +\infty\right[$. *Então, para todo* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno, existe uma única função contínua* $x = h(y)$ *cujo domínio é* $\left]\overline{y} - \varepsilon, \overline{y} + \varepsilon\right[$, *que verifica*

$$h(\overline{y}) = \overline{x}, \qquad e \qquad \frac{h(y)^2 - y}{h(y) + y} + h(y) = 0, \qquad \forall y \in \left]\overline{y} - \varepsilon, \overline{y} + \varepsilon\right[.$$

O aluno é aconselhado a representar gráficamente a função definida por (9) *para melhor compreender este exemplo.*

Notação 34 *Um ponto de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ *será indicado por* (x, y), *sendo entendido que* $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. *Considere-se uma função de classe* C^1, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$. *A matriz Jacobiana de* f *será indicada por*

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} D_x f(x, y) & D_y f(x, y) \end{pmatrix},$$

em que

$$D_x f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k(x,y)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k(x,y)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k(x,y)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n},$$

$$D_y f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k(x,y)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_k(x,y)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_k(x,y)}{\partial y_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times m}.$$

Teorema 35 (Função implícita) *Considere-se um conjunto aberto,* $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, *uma função de classe* C^1, $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$, *e um ponto* $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$, *tal que* $f(\overline{x}, \overline{y}) = 0$.
Se $\det(D_y f(\overline{x}, \overline{y})) \neq 0$, *então existem abertos* $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ *tais que*

1. $\overline{x} \in U, \qquad \overline{y} \in V, \qquad U \times V \subset A$;
2. *Existe uma única aplicação* $g : U \mapsto V$ *definida implicitamente pela equação* $f(x, y) = 0$.

Além disso, a função g *é de classe* C^1 *e verifica*

$$\begin{aligned} g(\overline{x}) &= \overline{y}; \\ Dg(x) &= -\left(D_y f(x, g(x))\right)^{-1} D_x f(x, g(x)), \qquad \forall x \in U. \square \end{aligned} \tag{12}$$

Demonstração. Considere-se a aplicação $h : A \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, definida por

$$h(x, y) = (x, f(x, y)).$$

h é de classe C^1 e

$$J_h(\overline{x}, \overline{y}) = \det \begin{pmatrix} Id_n & 0 \\ D_x f(\overline{x}, \overline{y}) & D_y f(\overline{x}, \overline{y}) \end{pmatrix} = \det(D_y f(\overline{x}, \overline{y})).$$

Então, o Teorema 26 garante a existência de abertos $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ tais que $\overline{x} \in U$, $\overline{y} \in V$, $U \times V \subset A$, $h(U \times V)$ é aberto e $h^{-1} : h(U \times V) \mapsto U \times V$ é de classe C^1. Note-se que h^{-1} se pode representar

na forma $h^{-1}(u,v) = (u, \eta(u,v))$, $\forall (u,v) \in h(U \times V)$, em que $\eta : h(U \times V) \mapsto V$ é uma função de classe C^1. Seja $g(x) = \eta(x, 0)$. Então, g é de classe C^1, $g(\overline{x}) = \overline{y}$ e, por construção, $f(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in U$. Suponha-se que existe uma outra função $\widetilde{g} : U \mapsto V$ definida implicitamente pela equação $f(x,y) = 0$. Então $h(x, g(x)) = (x, f(x, g(x))) = (x, 0) = (x, f(x, \widetilde{g}(x))) = h(x, \widetilde{g}(x))$, pelo que a injectividade de h implica $g = \widetilde{g}$.
Para provar a igualdade (12), considere-se a função $\phi(x) = f(x, g(x))$. É claro que $\phi(x) = 0$, $\forall x \in U$, o que implica $D\phi(x) = 0$, $\forall x \in U$. Por outro lado,

$$D\phi(x) = D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x))\, Dg(x),$$

pelo que a equação

$$D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x))\, Dg(x) = 0$$

é satisfeita em todos os pontos $x \in U$. Tendo em conta que $D_y f(x, g(x))$ admite inversa, esta equação é equivalente à igualdade (12). ■

O exemplo seguinte mostra como podemos usar o Teorema 35 para obter alguma informação sobre uma função definida implicitamente, num caso em que a função implícita não pode ser obtida em forma explícita.

Exemplo 36 *Considere-se a equação*

$$\sin(x + \log y) + x = 0 \tag{13}$$

Facilmente se verifica que o ponto $x = 0$, $y = 1$ é solução desta equação. No entanto, existem outras soluções.
A função $f(x,y) = \sin(x + \log y) + x$ é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Um breve cálculo mostra que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x + \log y) + 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y}\cos(x + \log y).$$

Logo, o Teorema da função implícita garante que existem $\varepsilon, \delta > 0$ tais que existe uma única função $g :]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto]1 - \delta, 1 + \delta[$ que verifica $\sin(x + \log g(x)) + x = 0$, $\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Essa função verifica $g(0) = 1$ e

$$g'(0) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -2.$$

Referências

[1] Demidovitch, B.: *Problemas e exercícios de análise matemática.* 6^a Ed., Editora Mir (1987).

[2] Depree, J. D.; Swartz, C. W.: *Introduction to real analysis.* John Wiley & Sons (1988).

[3] Dias Agudo, F. R.: *Análise Real.* 2^a Ed., Escolar Editora. ISBN 972-592-079-1. (1994).

[4] Sanchez, L.: *Análise em* $\mathbb{R}^n$ *- Métodos do Cálculo Diferencial.* 5^a Ed., Associação de Estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa (2001).

[5] Spivak, M.: *Calculus on manifolds - A modern approach to classical theorems of advanced calculus.* Addison-Wesley Publishing Company (1965).

[6] Webb, J. R. L.: *Functions of Several Real Variables.* Ellis Horwood (1991).

Índice