ANÁLISE MATEMÁTICA II
EXERCÍCIOS

1. Estude quanto à convergência as seguintes séries:

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$;

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100k+1}{k} k^{-2}$;

   (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$;

   (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2k+1}$;

   (e) $\sum_{k=1}^{\infty} k^p p^k, \qquad p > 0$;

   (f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1\right)^k$;

   (g) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\frac{1}{k}}$;

   (h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}, \qquad 0 < q < p$;

   (i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^k}$;

   (j) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k^p}, \qquad p > 0$;

   (k) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2\left(\pi \frac{k+1}{k}\right)$;

   (l) $\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{k}}$;

   (m) $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$;

   (n) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{k}\right)$;

2. Calcule a soma das seguintes séries:

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k-1)(\alpha+k)}, \qquad \alpha > 0;$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{2^{2k+1}};$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} (2k+3)\frac{2^{3k}}{5^{2k-5}}.$

3. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, em que

$$a_n = \begin{cases} c^n & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{c^n}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

   (a) Mostre que a série é convergente quando $|c| < 1$ e é divergente quando $|c| \geq 1$.
   (b) Mostre que o critério da razão não permite concluir sobre a convergência da série no caso $|c| \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   (c) Calcule a soma da série no caso $|c| < 1$.

4. Chama-se **subsérie** de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a qualquer série do tipo $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, em que a_{n_k} uma subsucessão de a_n.

   (a) Mostre que uma série é absolutamente convergente se e só todas as suas subséries forem convergentes.
   (b) Dê um exemplo de uma série convergente que admita uma subsérie divergente.

5. Mostre que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente se e só se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ for convergente sempre que $\{b_n\}$ for uma sucessão limitada.

6. Diz-se que uma dupla série $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$ é **absolutamente convergente** se a dupla série $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}|$ for convergente.

   (a) Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$ for absolutamente convergente, então

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

(b) Apresente um exemplo de uma série convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$ que verifique

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \neq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

7. (a) Considere uma sucessão $\{a_n \geq 0\}$. Mostre que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ é também convergente.

   (b) Mostre que a proposição da alínea anterior não é em geral verdadeira se a hipótese de não negatividade do termo geral for omitida.

8. (a) Suponha que a sucessão da somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é limitada. Mostre que se $\{a_n\}$ for uma sucessão monótona convergente para zero, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é convergente.

   (b) Prove que $\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \qquad x \neq 0,\ n \in \mathbb{N}.$

   (c) Use os resultados anteriores para provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ é convergente.

9. Apresente um exemplo de uma sucessão $\{a_n \geq 0\}$, convergente para zero, tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ seja divergente.

10. Determine o limite das seguintes sucessões de funções (caso exista). A convergência é pontual ou uniforme?

    (a) $f_k(t) = kt(1-t)^k, \qquad t \in [0,1];$

    (b) $f_k(t) = \frac{t^{2k}}{1+t^{2k}}, \qquad t \in \mathbb{R};$

    (c) $f_k(t) = \frac{\sin kt}{k\sqrt{t}}, \qquad t > 0.$

11. Considere uma função $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ e uma sucessão f_k, uniformemente convergente para $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$.
Será que gf_k converge uniformemente para gf? Caso contrário, formule uma condição que, sendo satisfeita por g, garanta a convergência uniforme de gf_k.

12. Determine o raio de convergência de cada uma das seguintes séries. Nos casos em que $0 < r < +\infty$, estude a convergência da série em $x = \pm r$.

    (a) $\sum_{k=1}^{\infty} k! x^k;$

    (b) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k!};$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$;

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!(x+3)^k}{k^k}$;

(e) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(x-3)^{2k}}{(k+1)\log(k+1)}$;

(f) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-2)(x-3)^k}{(k+1)^2 2^{k+1}}$;

(g) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{2^{k-1}k^k}$.

13. Considere a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} k^2 x^k$.

    (a) Determine o raio de convergência da série.

    (b) Determine a soma da série.
    Sugestão: note que $k^2 = k(k-1) + k$.

14. Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

    (a) Determine o raio de convergência da série.

    (b) Mostre que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ e qualquer $x \in]-1, 1[$ se verifica.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

    (c) Utilize os resultados anteriores para obter representações de cada uma das segintes funções sob a forma de séries de potências. Indique o intervalo em que tais representações são válidas.

        i. $f(x) = \log(1+x)$;

        ii. $f(x) = \arcsin x$;

        iii. $f(x) = \arctan x$.

15. Prove que a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{k}t)}{k^2}$ converge uniformemente para uma função diferenciavel em $\mathbb{R}$.

16. Prove que a série $\zeta(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-x}$ converge para uma função contínua em $]1, +\infty[$ (a chamada função zeta de Riemmann).

17. Estude as seguintes séries quanto à convergência uniforme.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k^2}$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k$;

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2}$;

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$.

18. (a) Mostre que $s(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k^4x^2}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

    (b) Mostre que s é diferenciavel em qualquer ponto $x \neq 0$ mas $s'(0)$ não existe.

19. Mostre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos\frac{k}{t}}{k^2\sqrt{t}}\, dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{k}{t}}{k^2\sqrt{t}}\, dt.$$

20. Sendo A e B dois subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$, mostre que

    (a) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$;

    (b) $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$. Mostre com um exemplo que hà casos em que esta inclusão é estrita;

    (c) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Será que a implicação recíproca é verdadeira?

21. Determine e represente graficamente o domínio de cada uma das seguintes funções. Diga, justificando se o domínio é aberto, fechado ou nem aberto nem fechado.

    (a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{\log(x+y)}$;

    (b) $f(x,y) = \log \frac{x+y+xy}{4-x^2-y^2}$;

    (c) $f(x,y) = \sqrt{\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$.

22. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    Mostre que $x \mapsto f(x,0)$ e $y \mapsto f(0,y)$ são funções contínuas na origem mas $(x,y) \mapsto f(x,y)$ não é contínua no ponto $(0,0)$.

23. estude quanto à continuidade a seguinte função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y+1}{x^2+1} e^{-\frac{|y|}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

24. O ângulo entre dois vectores $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pode ser definido como

$$\alpha = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}}.$$

Será que $x_n \to x$ implica que o ângulo entre x_n e x converge para zero? Justifique.

25. Considere a função $f(x, y, z) = 2x^2 y - 3y^2 z$. Calcule $f'_{(2,-1,3)}(1, 2, -1)$.

26. Considere a função $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.
mostre que f é contínua, as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0)$ existem mas f não é diferenciavel na origem.

27. Estude quanto à diferenciabilidade a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

28. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e mostre que esta derivada é uma função descontínua.

(d) Mostre que f é diferenciavel na origem.

29. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Mostre que a derivada $f'_{(u,v)}(0, 0)$ existe, qualquer que seja o vector $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) Estude a continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ na origem.

(c) Mostre que f não é diferenciavel na origem.

30. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^n}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Estude f quanto à continuidade e diferenciabilidade no ponto $(0, 0)$, em função de $n \in \mathbb{Z}$.

31. Escreva a fórmula de Mc-Laurin de segunda ordem para as funções

    (a) $f(x, y) = e^{x+y}$;

    (b) $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^4}$;

    (c) $f(x, y) = (x^2 + 2xy, xe^y, y + e^{x+y})$;

32. Seja $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de classe C_2, seja $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ a função

$$u(\rho, \alpha) = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha),$$

    e considere-se a função $g = f \circ u$.
    Prove que

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \circ u = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}$$

33. Considere uma função duas vezes diferenciavel, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e seja $u(x, y) = f(x - ay) + f(x + ay)$. Mostre que u satisfaz a equação

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

34. Considere uma função de classe C_2, $f(u, v)$, e seja

$$w = xf\left(xy, \frac{y}{x}\right).$$

    (a) Mostre que

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} - w = 2x^2 y \frac{\partial f}{\partial u}.$$

    (b) Calcule $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

35. Seja $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciavel satisfazendo a condição

$$\|\nabla f(x, y)\| = 1, \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

    Considerando a função $g(u, v) = f(2uv, u^2 - v^2)$,

    (a) mostre que

$$\|\nabla g(u, v)\|^2 = 4(u^2 + v^2), \qquad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

    (b) Calcule $\nabla g(1, 1)$ supondo que $\nabla f(2, 0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$.

36. A função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

    tem algum extremo? Justifique.

37. Determine e classifique os extremos das seguintes funções:

    (a) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

    (b) $f(x,y) = \frac{(x+1)y}{x^4+2y^4}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

    (c) $f(x,y) = (x-1)(y-1)(x+y-1), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

    (d) $f(x,y) = (y-x^2)(y-1), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

    (e) $f(x,y) = xy(xy-2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

    (f) $f(x,y) = (xy+z^2)e^{-x^2-y^2-z^2}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

38. Mostre que uma função contínua $f : [a,b] \mapsto [a,b]$ tem pelo menos um ponto fixo.

39. Mostre o sistema de equações

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{y}{4+x^2+y^2} \\ y = 2 - \frac{x}{4+x^2+y^2} \end{cases}$$

    admite uma única solução em $\mathbb{R}^2$.

40. Seja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, uma função diferenciável para a qual existe $\alpha < 1$ que verifica $\left\| f'_v(x) \right\| \leq \alpha \left\| v \right\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

    (a) Prove que existe um único ponto $x \in \mathbb{R}^n$ que verifica $x = f(x)$.

    (b) Dê uma interpretação geométrica do resultado obtido na alínea anterior, no caso $n = 1$.

41. Seja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. Mostre que a condição $\left\| f(x) - f(y) \right\| < \left\| x - y \right\| \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ só por si não é suficiente para garantir que a equação $f(x) = x$ admite alguma solução.

42. Seja $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, uma função contínua para a qual existe $\alpha < 1$ tal que, quaisquer que sejam $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$, verifica-se $\left\| f(x,z) - f(x,y) \right\| \leq \alpha \left\| z - y \right\|$.

    (a) Prove que existe uma única função $g : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, que verifica $g(x) = f(x, g(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$.

    (b) Prove que a função g é contínua.

43. Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, e considere a sucessão de funções $f^k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, definida por $f^1(x) = f(x)$, $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right)$, $k = 1, 2, 3, ...$
    Prove que se existir algum $\alpha < 1$ e algum $k \in \mathbb{N}$, tais que $\left| f^k(x) - f^k(y) \right| \leq \alpha \left| x - y \right|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, então a equação $f(x) = x$ admite uma única solução em $\mathbb{R}^n$.

44. Considere a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$
Mostre que f é diferenciável em todo $\mathbb{R}$, $f'(0) \neq 0$ mas f não é injectiva em nenhuma vizinhança de 0. Porque é que este resultado não contradiz o Teorema da função inversa?

45. Seja $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, a função definida por $f(x, y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$. Mostre que f admite inversa local na vizinhança de qualquer ponto mas não admite inversa global.

46. Discuta a existência de função inversa nos seguintes casos:

    (a) $f(x, y) = (x^2 - y^2,\ xy)$;

    (b) $f(x, y) = (x^2 + y^2,\ xy)$.

47. Seja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, uma função diferenciável que admite inversa numa vizinhança do ponto a. Mostre que se $J_f(a) = 0$, então f^{-1} não é diferenciável no ponto $f(a)$.

48. Considere a função $f(x, y) = (x^3 + 2xy + y^2,\ x^2 + y)$. Mostre que f admite inversa numa vizinhança do ponto $(1, 1)$. Calcule $Df^{-1}(4, 2)$ e escreva a fórmula de Taylor de primeira ordem para f^{-1} na vizinhança do ponto $(4, 2)$.

49. Mostre que a equação $x^3y + y^3x - 2 = 0$ define implícitamente uma função $y = f(x)$ numa vizinhança do ponto $(1, 1)$. Calcule a derivada de f no ponto 1.

50. Mostre que a equação $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ define implícitamente uma função $z = f(x, y)$ na vizinhança do ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Determine o plano tangente ao gráfico de f nesse ponto.

51. Considere a equação $(x + 1)^2 y - xy^2 = 4$. Determine se esta equação define implícitamente uma função $y = f(x)$ na vizinhança de algum dos pontos $(-1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$.

52. (a) Determine $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ tais que a equação $\log \sqrt{x^2 + y^2} = \alpha arctg \frac{y}{x}$ define implícitamente uma função $y = y(x)$ com domínio numa vizinhança de x_0 e conjunto de chegada numa vizinhança de y_0.

    (b) Calcule $y'(x_0)$ e $y''(x_0)$.

53. Considere uma função de classe C^1, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,.e sejam α, β, γ números reais (fixos mas arbitrários).

    (a) Mostre que se existir um ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ que verifique a equação

    $$x^2 + y^2 + z^2 = f(\alpha x + \beta y + \gamma z), \tag{1}$$

    e verifique $z_0 \neq \frac{\gamma}{2} f'(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)$, então a equação (1) define implícitamente uma função $z = z(x, y)$ com domínio numa vizinhança de (x_0, y_0) e conjunto de chegada numa vizinhança de z_0.

(b) Mostre que a função definida implícitamente na alínea anterior verifica

$$(\gamma y-\beta z)\frac{\partial z}{\partial x}+(\alpha z-\gamma x)\frac{\partial z}{\partial y}=\beta x-\alpha y.$$

54. Seja $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$, uma função de classe C^1.

(a) Sejam α, β, números reais (fixos mas arbitrários). Mostre que se existir um ponto
$(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ que verifique a equação

$$f(x-\alpha z,y-\beta z)=0, \tag{2}$$

e satisfaça $\alpha\frac{\partial f}{\partial u}(x_0-\alpha z_0,y_0-\beta z_0)+\beta\frac{\partial f}{\partial v}(x_0-\alpha z_0,y_0-\beta z_0)\neq 0$, então a equação (2) define implícitamente uma função $z=z(x,y)$ com domínio numa vizinhança de (x_0,y_0) e conjunto de chegada numa vizinhança de z_0.

(b) Mostre que a função da alínea anterior verifica $\alpha\frac{\partial z}{\partial x}+\beta\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

(c) Mostre que se existir um ponto $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ que verifique a equação

$$f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0, \tag{3}$$

e satisfaça $x_0\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x_0}{z_0},\frac{y_0}{z_0}\right)+y_0\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x_0}{z_0},\frac{y_0}{z_0}\right)\neq 0$, então a equação (3) define implícitamente uma função $z=z(x,y)$ com domínio numa vizinhança de (x_0,y_0) e conjunto de chegada numa vizinhança de z_0.

(d) Mostre que a função da alínea anterior verifica $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

55. (a) Mostre que o sistema de equações $\begin{cases} xz-yt=1\\ xyzt=20\end{cases}$ define implícitamente uma função
$(z,t)=f(x,y)$ numa vizinhança do ponto $(x,y,z,t)=(1,2,5,2)$.

(b) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ no ponto $(1,2)$.

(c) Mostre que as mesmas equações não definem implícitamente nenhuma função $(x,z)=g(y,t)$, em qualquer vizinhança do mesmo ponto.

56. Seja $f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$, uma função de classe C_1 e suponha que a equação $f(x,y,z)=0$ define implícitamente qualquer uma das variáveis como uma função de classe C_1 das restantes variáveis. Mostre que $\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial z}=-1$.

57. Considere o sistema de equações $\begin{cases} x-\frac{y}{2+x^2+y^2}=\alpha\\ y-\frac{x}{2+x^2+y^2}=\beta\end{cases}$.

(a) Mostre que, para cada $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, o sistema admite uma única solução.

(b) Prove que a função que faz corresponder a cada par (α, β) a respectiva solução do sistema é de classe C^∞ numa vizinhança do ponto $\alpha = \beta = 0$. Calcule o seu diferencial nesse ponto.

58. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $|y-1| < \varepsilon$ a equação

$$x \tan(xy) + x + \sin(y-1) = 0$$

tem uma solução $x = x(y)$ tal que $1 < y < 1+\varepsilon \Rightarrow x < 0$, $1-\varepsilon < y < 1 \Rightarrow x > 0$.

59. (a) Pode a equação $xy - z\log y + e^{xz} = 1$ ser resolvida em ordem a x na vizinhança do ponto $(0,1,1)$?

(b) Idem, em ordem a y.

60. Seja $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, uma função de classe C^1 que verifica $f(0,0) = 0$, $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ e seja $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, a função definida por

$$g(x,y,z) = f\left(x + 2y + 3z - 1, x^3 + y^2 - z^2\right).$$

(a) Mostre que existe uma função $\gamma : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\gamma(-2,3) = -1$ e $z = \gamma(x,y)$ resolve a equação $g(x,y,z) = 0$ quando (x,y) é um ponto próximo de $(-2,3)$.

(b) Determine $D\gamma(-2,3)$.

61. Considere um modelo para o mercado de um determinado bem de consumo

$$S = S(P), \qquad D = D(P,Y),$$

em que S, D, P, Y são respectivamente, a quantidade procurada, a quantidade oferecida, o preço do produto e o rendimento médio dos consumidores. $P \mapsto S(P)$ e $(P,Y) \mapsto D(P,Y)$ são funções de classe C^1 com domínio em $]0,+\infty[$ e $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, respectivamente, com $\dfrac{\partial S}{\partial P} > 0$, $\dfrac{\partial D}{\partial P} < 0$ e $\dfrac{\partial D}{\partial Y} > 0$.
Suponha que o mercado tem um equilíbrio na situação $P = P_0$, $Y = Y_0$. Mostre que, pelo menos para valores do rendimento médio próximos de Y_0, o ponto de equilíbrio do mercado é uma função de classe C^1 do rendimento médio dos consumidores.

62. (a) Mostre que as equações $\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 41; \\ 2x^2 - y^2 + 3z^2 = 10, \end{cases}$ definem implícitamente uma curva diferenciável que passa pelo ponto $(1,2,2)$.

(b) Determine a recta tangente a essa curva nesse ponto.

(c) Determine o plano normal à curva nesse ponto.