Programação Matemática 2008/2009

Ficha de exercícios n^o 4

1. Uma empresa do sector agro-alimentar pretende iniciar, a título experimental, a produção de sumo de groselha e de sumo de cenoura. Os estudos de mercado já efectuados indicam que fixando o preço de venda por litro, respectivamente em p_1 e p_2 (u.m.) será possível vender $4000 - 10p_1 + p_2$ litros de sumo de groselha e $2000 - 9p_2 + 0.8p_1$ litros de sumo de cenoura no período experimental.

Antes do engarrafamento são adicionados 2 gramas de conservante por litro ao sumo de groselha e 3 gramas de conservante por litro ao sumo de cenoura. O sumo de groselha é engarrafado em garrafas de 1/3 de litro e o sumo de cenoura em garrafas de 1 litro. No período experimental a empresa pretende usar apenas 5 kg de conservante e 4500 tampas de garrafa que tem em armazém. Formalize o problema da determinação das quantidades de sumo a produzir de cada tipo no período experimental de forma a maximizar a receita.

2. O departamento de investigação da Companhia Fertil SA acaba de descobrir um novo fertilizante composto apenas por duas matérias primas. A Fertil SA quer tirar partido desta descoberta produzindo a maior quantidade possível do novo fertilizante. O custo unitário das matérias primas é, respectivamente, 8000 u.m. e 5000 u.m. e a Fertil SA dispõe apenas de 40 000 u.m. para a compra de matérias primas. Quando se combinam as quantidades x_1 e x_2 das duas matéria primas, respectivamente, a quantidade q de fertilizante obtida é:

$$q = 4x_1 + 2x_2 - 0.5x_1^2 - 0.25x_2^2$$

Use o algoritmo de Wolfe para determinar a quantidade máxima de novo fertilizante que é possível produzir.

3. Um gestor de uma empresa de pecuária tem de decidir quantas cabeças de gado deverá adquirir no próximo ano de forma a minimizar o montante total a investir. Para esse efeito pretende adquirir dois tipos de animais, vitelas e leitões, que têm custos unitários de aquisição de 5000 e 1000 u.m., respectivamente. Questões relacionadas com a estabilidade do activo pecuário obrigam-no a adquirir em cada ano um mínimo de 10 animais novos, sendo pelo menos 5 vitelas e 3 leitões. Com cada um dos tipos de animais espera obter um rendimento anual global inferior a 45 000 u.m..

Determine o número de cabeças de gado de cada tipo que devem ser compradas. Justifique as suas opções.

4. Um hospital vai ampliar as suas instalações com a construção de um edifício destinado às crianças onde funcionarão os serviços de Pediatria, Maternidade, Raios X, Análises, Ortopedia e Urgência. Pretende instalar-se um sistema de tapetes rolantes fazendo o menor número de ligações que garantam a comunicação entre todos os serviços. A administração pretende ainda instalar uma escada rolante que permita o acesso ao novo edifício a partir das instalações já existentes.

O quadro seguinte indica o comprimento (em metros) dos vários corredores onde podem ser instalados os tapetes e a escada.

	Análises	Maternidade	Pediatria	Raios X	Urgência	Ortopedia
Maternidade	70					
Pediatria	80	90				
Raios X	70	-	-			
Urgência	60	50	90	60		
Ortopedia	-	70	90	70	60	
Instalações Exist.	70	80	60	-	-	80

Sabendo que tanto os tapetes como a escada rolante têm dois sentidos e que o custo por metro instalado é de 2 e 3 u.m., respectivamente, determine o orçamento mínimo que é preciso disponibilizar para este projecto. Justifique as suas opções.

5. a)Resolva o seguinte problema de optimização por metas:

$$\min\ Z = P_1\left(d_1^- + d_1^+\right) + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^+$$

$$\begin{array}{llllll}
\text{s.a} & x_1 & +d_1^- - d_1^+ & & & = & 3 \\
& x_1 - x_2 & & +d_2^- - d_2^+ & & = & 0 \\
& 2x_2 & & & +d_3^- - d_3^+ & = & 1 \\
& x_1 + 2x_2 & & & & \leq & 4 \\
& \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0}
\end{array}$$

b) Determine a solução mantendo alterando as prioridades das metas para $P_1\left(d_2^+\right) + P_2\left(d_1^- + d_1^+\right) + P_3\left(d_3^+\right)$.

6. Considere o seguinte problema de programação não linear:

$$\min\ f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - \ln(x_2 + 1)$$

$$\begin{array}{llll}
\text{s.a} & 2x_1 + x_2 & \leq & 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

Prove que é um problema de programação convexa.

7. Considere a função $f(x,y) = -2x^2 - 2y^2 - 2xy + 6x + 4y$.

a) Faça a primeira iteração de um algoritmo para determinar o máximo da função.

b) Mostre que o problema da determinação do máximo desta função sujeita às condições

$$
\begin{array}{ll}
x - y & \geq 0 \\
x & \leq 1 \\
x, y & \geq 0
\end{array}
$$

é de programação convexa e escreva as condições de Karush-Kuhn-Tucker.

8. Considere o seguinte problema de PLI:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max } Z = & 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 12x_4 & & \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 + x_4 & \leq & 2.5 \\
 & x_3 + x_4 & = & 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} & &
\end{array}
$$

Sabendo que a solução óptima da relaxação linear é: $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0.5$

a) Apresente um minorante e um majorante para o valor óptimo do problema.

b) Determine a solução óptima do problema usando um algoritmo de tipo branch and bound. Justifique as suas opções.

c) Apresente um corte válido para o problema. Justifique.

9. Dada uma rede de fluxos $G = (N, A)$ cujos arcos $(k, j) \in A$ têm capacidades $U_{ij} \geq 0$ e dado um fluxo, X, admissível em G, considere a rede $G(X) = (N, A(X))$ com

$$A(X) = \{(k, j) \in A : X_{kj} < U_{kj}\}$$

Prove que se X é um fluxo máximo para G não existe nenhum caminho orientado em $G(X)$ do nodo origem para o nodo destino.